



$\log 3/43 + \frac{3}{4} \text{colog } 2$   
 $+ \frac{1}{4} \text{col } \log 5/238$   
: ۰/۲۸۵۱ ۲۸۳۳ ۱۹۲  
 $D = ۲۳$   
 $\sqrt{۰/۰۷۵} \# ۰/۵۹۵۷$

# حساب

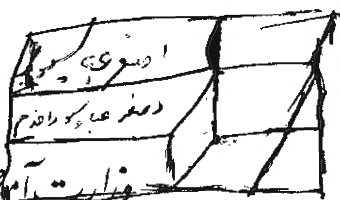
برای سال چهارم ریاضی

توانا بود و سکر که و نانا بود  
وزارت آموزش پرورش

توانا بود هر که دانا بود

اصغر علی لیسری

ساعت ۱۲ به ۱۳  
مستحقان و ایضاً امر قلم  
۹ باره



۱۳۶۵

# حساب

برای سال چهارم ریاضی

نویسنده: خرداد و بهمن  
مترجم: راجه عجمی  
کتابخانه: کتابخانه مرکزی  
حق چاپ محفوظ

چاپ و توزیع از :



۱۳۴۶

Mansoor Pooladi



این کتاب که به وسیله آفا یان : موسی آذر نوش، احمد بیرشک،  
جها نگیر شمس آوری، عبدالغنی علیم مروستی، پروفورتتی فانی،  
باقر نحوی، شادروان محسن هنربخش نگارش یافته ، بر طبق ماده ۴  
تصویب نامه شماره ۹۱۸ هیئت دولت مورخ ۴۱۹۳۱۸ و ماده يك  
تصویب نامه قانونی ۴۴۸۴ مصوب ۴۳۳۱۸ از طرف کمیونهای  
منتخب شورای عالی فرهنگ برای تدریس در دبیرستانها برگزیده  
شد و به موجب رأی شماره ۱۵۶۱ شورای عالی فرهنگ مورخ  
۴۳۸۳۶ از نظر مطالب در سازمان کتابهای درسی ایران بررسی  
شد و در چاپخانه پیروز بچاپ رسید .

نباید از نظر دورداشت که با وسعت دامنه علوم در جهان امروز، هر اندازه کتب درسی جامع و کامل تهیه شده باشد کافی برای تجهیز علمی جوانان نیست و دانش آموزان گرامی نباید مطالعات خود را به این کتب محدود سازند، بلکه باید با راهنمایی معلمان خویش در ساعات فراغت به مطالعه کتاب در کنار دروس خود بپردازند و اوقات عزیز خویش را برایگان از کف ندهند. بر محققان و مؤلفان کشور فرض است که در راه تهیه اینگونه کتابها بکوشند. بخصوص در این عصر مرقی که به اراده شاهنشاه آریا مهر و در سایه انقلاب ششم بهمن ماه ۱۳۴۱ و با اجرای طرح سپاه دانش، اهالی نقاط دورافتاده مملکت نیز از نعمت سواد برخوردار گردیده و هر روز بر عده افراد کتابخوان کشور افزوده می شود فرصت را غنیمت شمرند و به تألیف کتابهایی مفید در رشته های مختلف علوم و فنون و ادب بپردازند و از این راه به پیشرفت فرهنگ و علوم و رشد اقتصادی کشور خدمتی ارزنده بنمایند.

وزیر آموزش و پرورش - دکتر هادی هدایتی

## فهرست مندرجات

صفحه	عنوان
۱	فصل اول - لگاریتم
۷	محاسبه لگاریتم يك عدد
۱۳	قضایای مربوط به لگاریتم
۱۶	اعمال مربوط به لگاریتم
۱۸	محاسبه به وسیله لگاریتم
۲۷	فصل دوم - تصاعد
۲۷	الف - تصاعد عددی (حسابی)
۳۷	ب - تصاعد هندسی
۵۴	فصل سوم - ربح مرکب - قسط السنین
۵۹	اولاً - قسط السنین برای تشکیل سرمایه
۶۱	ثانیاً - قسط السنین برای استهلاك دين

بناام خدا

## فصل اول

### لگاریتم

رژانی ناصح و به ۹  
۱- توان يك عدد - حاصل ضرب چند عدد مساوی، مثل  $a \cdot a \cdot a$

را به صورت  $a^3$  می نویسند و می خوانند  $a$  به توان سه و حاصل  $a^3$  را توان سوم  $a$  می نامند. مثلاً  $125 = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$  و  $36 = 6 \times 6 = 6^2$  زیرا

۲- توان صفر يك عدد - می دانید که خارج قسمت دو مقدار

مساوی برابر است با يك، یعنی :

$$2^3 : 2^3 = 1 \text{ و } a^2 : a^2 = 1$$

$$a^m : a^m = 1$$

و بطور کلی

اما طبق قاعده تقسیم توانها می توانیم بنویسیم :

$$a^2 : a^2 = a^{2-2} = a^0$$

$$2^3 : 2^3 = 2^{3-3} = 2^0$$

$$a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$$

از آنچه گفته شد می توان تعریف زیر را نتیجه گرفت :

$$a^0 = 1$$

یعنی توان صفر هر عدد (جز صفر) مساوی يك است .

$$(-4)^0 = 1 \text{ و } (10)^0 = 1 \text{ و } \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$$

۳- توان منفی يك عدد - خارج قسمت  $5^4$  بر  $5^6$  از يك طرف

چنين تعيين می شود :

$$5^4:5^6 = \frac{5^4}{5^6} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{5 \times 5} = \frac{1}{5^2}$$

و از طرف ديگر طبق قاعده تقسيم دو قوه داریم :

$$\frac{5^4}{5^6} = 5^{4-6} = 5^{-2} \quad (\text{به توان منهای } 2)$$

بنابراين نتیجه می گیریم که :

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2}$$

و می توان تعريف توان منفی را چنين کرد:

هر عدد با نماينده منفی برابر كسری است كه صورتش ۱ و مخرجش

همان عدد با نماينده مثبت باشد. يعنی بطور کلی :

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

۴- ریشه يك عدد - گفتيم كه در  $125 = 5^3$  ، عدد ۱۲۵ را

توان سوم ۵ می گویند . حالا باید بدانيد كه عدد ۵ را ریشه سوم ۱۲۵

می گویند و آن را به اين شكل می نویسند :

$$5 = \sqrt[3]{125}$$

بطور کلی ریشه  $m$  ام  $A$  عددی است مانند  $a$  كه چون آن را به

قوة  $m$  برسانيم مساوی  $A$  شود .

$$\sqrt[m]{A} = a$$

$$A = a^m$$

ریشه  $m$  ام  $A$  يعنی  $\sqrt[m]{A}$  را به صورت  $A^{\frac{1}{m}}$  (به توان يك  $m$  ام)

هم می نویسند . بطور کلی :

هر ریشه را می توان به صورت توانی نوشت كه پایه اش پایه عدد زیر راديكال و نماي آن كسری باشد كه مخرجش مساوی شماره ریشه و صورت آن مساوی نماي عدد زیر راديكال باشد.

بنابراين برطبق قرار داد :

$$\sqrt[4]{5^4} = 5^{\frac{4}{4}}$$

$$\sqrt[q]{A^p} = A^{\frac{p}{q}} \quad \text{و بطور کلی}$$

۵- از آنچه راجع به توانهای يك عدد آموخته ايد می توانيد

بسهولت درك كنيد كه اگر در عدد  $10^a$  ،  $a$  (يعنی توان) رفته رفته

بزرگ شود ،  $10^a$  نیز متدرجاً بزرگ می شود و بالعكس اگر  $a$  كوچك

شود ، عدد  $10^a$  متدرجاً كوچك می گردد .

$$10^3 > 10^2 > 10^{1/75} > 10^{1/5} > 10 \quad \text{مثلاً}$$

$$10^2 = 100 \text{ و } 10^3 = 1000 \quad \text{زیرا}$$

$$10^{1/75} = (10)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10^1} = \sqrt[4]{10^1} = 56/24$$

$$10^{1/5} = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10^1} = 31/62$$

واضح است كه عدد  $31/62$  را می توان به صورت  $10^{1/5}$  نوشت .

و چون  $31/62 = 10^{1/5}$  بين  $10^1$  و  $10^2$  قرار دارد ، يعنی :

$$10^1 < 31/62 = 10^{1/5} < 10^2$$

هر عدد واقع بين  $10$  و  $100$  را می توان به شكل توانی از  $10$  نوشت

كه نماي آن بين  $1$  و  $2$  باشد .



۶- تعریف - اگر عددی مثبت، مانند  $N$  را به شکل توانی از  $۱۰$  یعنی به شکل  $۱۰^x$  بنویسیم عدد  $x$  یعنی نمای پایه  $۱۰$  را، **لگاریتم** اعشاری عدد  $N$  می گویند.

اگر  $N = 10^x$  باشد،  $x$  لگاریتم عدد  $N$  در پایه ۱۰ است که به این شکل نمایش می‌دهند:

$$\log \mathbf{N} = \mathbf{x}$$

ومی خوانند ، لگاریتم  $N$  مساوی است با  $x$  .  
از هر يك از برابریهای  $N = 10^x$  و  $\log N = x$  می توان دیگری را نتیجه گرفت . این مطلب را می توان چنین نمایش داد :

$$\log N = x \stackrel{\rightarrow}{\leftarrow} N = \vee \circ^x$$

دقت کنید! چون کلیه توانهای ۱۰ مثبت می باشند، اعداد منفی، لگاریتم ندارند.

۷- لگاریتم توانهای صحیح ۱۰- می‌دانید که اعداد ۱، ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ و... را می‌توان به‌صورت توان صحیح ۱۰ و همچنین اعداد  $\frac{1}{10}$ ،  $\frac{1}{100}$ ،  $\frac{1}{1000}$  و... را به صورت توان صحیح و منفی ۱۰ نوشت. بنابراین می‌توان لگاریتم آنها را تعیین کرد. مثلاً:

$1 = 10^0$				$\log 1 = 0$	
$10 = 10^1$	»	»	»	$\log 10 = 1$	و
$100 = 10^2$	»	»	»	$\log 100 = 2$	و
$1000 = 10^3$	»	»	»	$\log 1000 = 3$	و
$0,1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$	»	»	»	$\log 0,1 = -1$	و

$$0/001 = -\frac{1}{10^2} = 10^{-2} \quad \gg \gg \gg \log 0/001 = -3$$

$$0.0001 = \frac{1}{10^4} = 10^{-4} \quad \gg \gg \gg \log 0.0001 = -4$$

بنابراین لگاریتم عددهایی مانند ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰، ۱۰۰۰۰ و .... عددی است صحیح و مثبت که مقدارش برابر با تعداد صفرهای آن عدد است و لگاریتم هریک از عددهای اعشاری ۰/۱، ۰/۰۱، ۰/۰۰۱ و .... عددی است صحیح و منفی که قدر مطلق آن برابر با تعداد صفرهای سمت چپ عدد است. (با منظور داشتن صفری که قبل از ممیز است).

۸- نگاريتم يك عدد - اگر عدد  $N$  برابر يكي از قواي صحيح

۱۰ نباشد ناچار بین دو توان متوالی ۱۰ واقع است . پس لگاریتم آن نیز بین دو عدد صحیح واقع می شود . بنابراین می توان گفت که بطور کلی  $\log N$  دارای يك قسمت صحیح و يك قسمت كوچكتر از واحد است كه می توان مقدار تقریبی آن را به صورت اعشاری نوشت .

مثلاً عدد ۵۷۳ بین ۱۰۰ یعنی  $(10^2)$  و ۱۰۰۰ یعنی  $(10^3)$  واقع است . پس :

$$2 < \log \Delta V_3 < 3$$

یعنی می توان گفت که لگاریتم ۵۷۳ برابر است با مجموع عدد صحیح ۲ و یک عدد کوچکتر از واحد (اعشاری). یعنی :

$$\log \Delta V \approx 2 + 0.1 \dots$$

همچنين چون  $-1 < \log_{0.5} 3 < 0, 0.1 = 10^{-1} < 0.5 < 1$

یعنی  $\log 0/573$  عددی است منفی و بزرگتر از  $(-1)$  . این عدد برابر است با مجموع  $(-1)$  و يك عدد مثبت کوچکتر از ۱ .

$$\log 0/573 = -1 + 0/.....$$

$$\frac{1}{10^2} < 0/00573 < \frac{1}{10^1} \quad \text{همچنین چون:}$$

$$10^{-3} < 0/00573 < 10^{-2} \quad \text{یا}$$

$$-3 < \log 0/00573 < -2 \quad \text{داریم:}$$

یعنی  $\log 0/00573$  ، عددی است منفی برابر با مجموع  $-3$  و يك عدد مثبت کوچکتر از ۱ :

$$\log 0/00573 = -3 + 0/.....$$

خواهیم دید که (از روی جدول لگاریتم) جزء اعشاری لگاریتم برابر

$$\log 0/00573 = -3 + 0/75815 \quad \text{است یعنی:}$$

برای سهولت محاسبه قرار بر این شده است که لگاریتمهایی را که شامل دو قسمت منفی و مثبت است به همان صورت جبری باقی گذارند و چنین بنویسند :

$$-3 + 0/75815 = \bar{3}/75815$$

جزء صحیح لگاریتم هر عدد را مفسر و جزء اعشاری آن را مانتیس می نامند . جزء اعشاری (مانتیس) همیشه مثبت و جزء صحیح (مفسر) ممکن است مثبت ، منفی یا صفر باشد .

۹- قضیه- اگر عددی را در قوای صحیح  $10$  ضرب یا بر آن تقسیم کنیم در مانتیس لگاریتم تغییری رخ نمی دهد .

مثلاً می خواهیم ثابت کنیم که اگر  $A$  را در  $10^n$  (  $n$  عددی است صحیح، مثبت یا منفی) ضرب کنیم مانتیس لگاریتم تغییر نمی کند .

به فرض آنکه  $\log A = x$  باشد ، داریم :  $A = 10^x$  . بنابراین :

$$\log(A \times 10^n) = \log(10^x \times 10^n) = \log 10^{x+n} = x+n$$

چون  $n$  عددی است صحیح پس قسمت اعشاری  $x+n$  یعنی مانتیس لگاریتم  $A \times 10^n$  با قسمت اعشاری  $x$  یعنی مانتیس لگاریتم  $A$  یکی است .

مثلاً قسمت اعشاری لگاریتم اعداد  $573$  ،  $57300$  و  $0/573$  و  $57/3$  یکی است . پس وقتی که دانستیم مانتیس لگاریتم  $573$  برابر  $0/75815$  است می فهمیم که مانتیس لگاریتم هریک از اعداد دیگر نیز همین  $0/75815$  است . بعکس برای تعیین قسمت اعشاری لگاریتم اعداد  $57/3$  و  $0/573$  و  $57300$  کافی است مانتیس لگاریتم  $573$  را بدست آوریم ( یعنی از ممیزهای  $57/3$  ،  $0/573$  و از صفرهای سمت راست  $57300$  صرف نظر کنیم) .

### محاسبه لگاریتم يك عدد

۱۰- تعیین مفسر یا جزء صحیح لگاریتم يك عدد - از آنچه

گفته شد معلوم می شود که :

اگر عددی بزرگتر از يك باشد مفسر لگاریتم آن يك واحد کمتر از عدد ارقام صحیح آن عدد است :

مثلاً مفسر لگاریتم  $453/75$  برابر ۲ و مفسر لگاریتم  $45/375$  برابر ۱ است ، زیرا :

$$10^2 < 453/75 < 10^3$$

$$10^1 < 45/375 < 10^2$$

اگر عدد کوچکتر از يك و به صورت اعشاری نوشته شده باشد مفسر



لگاریتم آن عددی است منفی که قدر مطلق آن مساوی عددی صفرهایی است که در سمت چپ اولین رقم آن عدد است .

(با منظور کردن صفر سمت چپ ممیز)

مثلاً مفسر لگاریتم عدد  $0/05761$  برابر  $2-$  و مفسر لگاریتم عدد  $0/457$  برابر  $1-$  است زیرا :

$$10^{-2} < 0/05761 < 10^{-1}$$

$$10^{-1} < 0/457 < 10^0$$

### ۱۱- تعیین مانتیس یا جزء اعشاری لگاریتم اعداد - جدول

**لگاریتم -** جدولهایی به نام جدولهای لگاریتم موجود است که در آن جزء اعشاری لگاریتم اعداد را با تقریب معین حساب کرده و نوشته اند . با دانستن طریقه بکار بردن این جدولها می توان مانتیس لگاریتم هر عدد را بدست آورد .

**توجه کنید!** در بعضی از جدولهای لگاریتم، جزء اعشاری لگاریتم تا کمتر از  $0/0001$  تقریب ، یعنی با چهار رقم اعشار و در بعضی دیگر تا کمتر از  $0/00001$  تقریب ، یعنی با پنج رقم اعشار نوشته شده است . چون در هر جدول طرز بکار بردن آن بتفصیل ذکر می شود ما در اینجا باختصار طریقه استفاده از يك جدول چهار رقمی را ، که در صفحات آخر کتاب آمده است شرح می دهیم :

چون در این جدول فقط جزء اعشاری لگاریتم همه اعداد سه رقمی نوشته شده است ، برای پیدا کردن جزء اعشاری لگاریتم يك عدد قبلاً ، در صورت لزوم ، با جابجا کردن ممیز یا حذف نمودن یا اضافه کردن صفر ، عدد را به يك عدد صحیح سه رقمی یا يك عدد اعشاری که جزء صحیح

آن سه رقمی باشد تبدیل می کنیم ( شماره ۹ ) . پس دو حالت در نظر می گیریم :

**حالت اول -** عدد مفروض صحیح و سه رقمی است ، مانند ۳۴۵ .

عدد دو رقمی سمت چپ این عدد یعنی ۳۴ را در ستون اول (ستونی که بالای آن N نوشته شده است) و ۵ (رقم آحاد) آن را در سطر اول جدول پیدامی کنیم . مانتیس لگاریتم ۳۴۵ عدد ۵۳۷۸ است که با ۳۴ در يك سطر و با ۵ در يك ستون است .

**حالت دوم -** عدد اعشاری است و جزء صحیح آن دارای سه رقم

است ، مانند  $734/6$  و  $502/81$

۱- چون  $735 > 734/6 > 734$  ، پس جزء اعشاری لگاریتم  $734/6$  از جزء اعشاری لگاریتم ۷۳۴ بزرگتر و از جزء اعشاری لگاریتم ۷۳۵ کوچکتر است .

جزء اعشاری لگاریتم ۷۳۴ برابر ۸۶۵۷ (ده هزارم)

و » » » ۷۳۵ » ۸۶۶۳ (ده هزارم)

است که اختلاف آنها برابر ۶ (ده هزارم) است .

اگر فرض کنیم که افزایش لگاریتم تقریباً متناسب با افزایش عدد است ، می گوئیم هرگاه بر ۷۳۴ يك واحد افزوده شود بر لگاریتم آن ۶ (ده هزارم) افزوده می شود . پس اگر بر ۷۳۴ ، شش دهم افزوده شود بر لگاریتم آن  $(3/6 = 0/6 \times 6)$  ده هزارم یا تقریباً ۴ ده هزارم افزوده خواهد شد . بنابراین مانتیس لگاریتم  $734/6$  برابر است با  $(4 + 8657)$  ده هزارم یا  $0/8661$  ، از این رو با توجه بداینکه مفسر لگاریتم این عدد ۲ است خواهیم داشت :

$$\log 734/6 = 2/8661$$

و همینطور :  $\log 7/346 = 0/8661$

در طرف راست هر صفحه در ستونی که بالای آن D نوشته شده است اختلاف مانیتسهای دو عدد متوالی سه رقمی وجود دارد، بنابراین، پیدا کردن جزء اعشاری لگاریتم ۷۳۵ و پیدا کردن تفاوت آن با جزء اعشاری لگاریتم ۷۳۴ لازم نیست زیرا این اختلاف را در ستون مزبور می توان یافت .

۴- چون  $\log 502/81 < 503 < 502/81$  ،  $\log 502/81$  بین  $\log 502$  و  $\log 503$  است .

جزء اعشاری لگاریتم ۵۰۲ برابر است با ۷۰۰۷ ده هزارم و  
 » » » ۵۰۳ برابر است با ۷۰۱۶ ده هزارم  
 اختلاف این اجزاء اعشاری می شود : ۹ ده هزارم

که می توان نوشت : اختلاف افزایش

۹ ده هزارم ۱

ده هزارم  $x = 7/29 \neq 7$   $x = 0/81$

پس جزء اعشاری لگاریتم ۵۰۲/۸۱ برابر مجموع ۷۰۰۷ ده هزارم و ۷ ده هزارم یعنی برابر ۷۰۱۴ ده هزارم می باشد و داریم .

$$\log 502/81 = 2/7014$$

$$\log 0/050281 = \bar{2}/7014$$

عمل فوق را بطور خلاصه معمولاً چنین می نویسیم :

$$502 \quad 7007$$

$$0/81 \quad 7D=9$$

$$\log 502/81 = 2/7014$$

دقت کنید ! چون در جدول ، جزء اعشاری هر لگاریتم ، چهار-

رقمی است ، ما نیز در ضمن محاسبه بیش از چهار رقم بعد از ممیز را نگار نمی بریم، مثلاً در تعیین قسمت اعشاری لگاریتم ۷۳۴/۶ دیدید که اختلاف مربوط به ۰/۶ ، برابر ۳/۶ ده هزارم یا ۰/۰۰۰۳۶ بود و چون پنجمین رقم بعد از ممیز از ۵ بیشتر بود به جای آن یک واحد به رقم چهارم بعد از ممیز اضافه کردیم ، یعنی ۳/۶ ده هزارم را برابر ۴ ده هزارم گرفتیم . در تعیین قسمت اعشاری لگاریتم ۵۰۲/۸۱ نیز اختلاف برابر ۷/۲۹ ده هزارم یا ۰/۰۰۰۷۲۹ بود و چون پنجمین رقم از ۵ کمتر بود از رقم پنجم و رقمهای مراتب پایین تر از آن صرف نظر کردیم و آن را برابر ۷ ده هزارم اختیار کردیم .

اگر در یک محاسبه رقم پنجم بعد از ممیز ۵ شود آن را حذف می کنیم و یک واحد به رقم چهارم بعد از ممیز علاوه می کنیم.

#### ۱۴- تعیین عددی که لگاریتمش معلوم است.

حالت اول - جزء اعشاری (مانتیس) لگاریتم را عیناً در جدول می شود پیدا کرد .

مثلاً اگر لگاریتم مفروض  $\bar{1}/8887$  باشد ، می بینیم که مانتیس یعنی ۸۸۸۷ عیناً در جدول وجود دارد . و در سطر است که جلو آن عدد ۷۷ از ستون N و در ستونی است که بالای آن ۴ می باشد ، پس عدد صحیح سه رقمی که مانتیس لگاریتمش ۸۸۸۷ باشد ، عدد ۷۷۴ است . اما مفسر لگاریتم مفروض ۱- است . پس عدد مطلوب ۰/۷۷۴ است .

$$\bar{1}/8887 = \log 0/774$$

حالت دوم - مانتیس لگاریتم مفروض عیناً در جدول یافت

نمی شود . مثلاً اگر بخواهیم عددی را که لگاریتمش برابر ۴/۶۵۹۵ است پیدا کنیم می بینیم که جزء اعشاری لگاریتم یعنی ۶۵۹۵ در جدول

penis  
valia

-۱۳-

$$\log 8 = 0,9031$$

$$\log 700 = 2,8451$$

۳ - به جای علامت ؟ عدد مناسب بگذارید :

$$\log ? = -3$$

$$\log 7 = 0,8451$$

$$\log 999 = 2,9996$$

$$\log ? = 3$$

$$\log ? = \frac{1}{2}$$

۴ - معلوم کنید لگاریتمهای اعداد زیر بین کدام دو عدد متوالی

صحیح هستند :

$$\log 54,6$$

$$\log 678$$

$$\log 0,87$$

$$\log 9,08$$

$$\times \log 0,0087$$

$$\log 0,087$$

۵ - مفسر لگاریتمهای عددهای زیر را بنویسید :

$$7,9$$

$$901$$

$$8712$$

۶ - لگاریتم اعداد زیر را بدست آورید :

$$0,4, 0,564, 3,57, 256, 4976, 3,214$$

$$0,4567, 2,7, 1001, 47900, 2111, 5278, 2,34$$

$$0,000457$$

۷ - عدد ما بازای (Antilogarithme) هریک از لگاریتمهای زیر را

بنویسید :

$$0,5678, 3,054, 0,3010, 2,3133$$

$$3,39998, 1,996, 1,7436, 5,4031$$

$$3,4128, 1,9013, 2,9027, 1,0102$$

\*\*\*

۴۱۰

تضایای مربوط به لگاریتم  $A = 0$

۱۶ - لگاریتم حاصل ضرب دو یا چند عدد مثبت برابر است

با مجموع لگاریتمهای آنها - اگر از روی جدول لگاریتم، مثلاً

لگاریتم اعداد ۲، ۳ و ۶ را پیدا کنید، خواهید دید که مجموع

لگاریتمهای ۲ و ۳ برابر لگاریتم  $2 \times 3 = 6$  است.

فردل پیما

-۱۴-

نیست ولی می توان در جدول دومانتیس متوالی ۶۵۹۰ و ۶۵۹۹ را بدست آورد که مانتیس مفروض مابین آنهاست :

$$6590 \quad \text{برابر مانتیس لگاریتم عدد} \quad 456$$

$$6599 \quad \text{عدد} \quad 457$$

$$D = 6599 - 6590 = 9 \quad \text{و} \quad 6595 - 6590 = 5$$

گوییم هرگاه بر جزء اعشاری لگاریتم، ۹ ده هزارم افزوده شود بر عدد، يك افزوده می شود، پس اگر بر جزء اعشاری لگاریتم ۵ ده هزارم افزوده شود، بر عدد  $0,55 \# \frac{5}{9}$  یا تقریباً  $0,6$  افزوده خواهد شد. یعنی

۶۵۹۵ برابر جزء اعشاری لگاریتم  $456,6$  است، و از آنجا :

$$4,6595 = \log 45660$$

صورت عمل را چنین می نویسیم :

$$D = 9 \quad 6590 \quad 456$$

$$5 \quad 0,6$$

$$4,6595 = \log 45660$$

۱۳ - تعریف - عدد  $0,774$  را عدد ما بازای  $1,8887$  (آنتی

لگاریتم (Antilogarithme) و  $45660$  را عدد ما بازای  $4,6595$

می نامیم.

تمرین

۱ - لگاریتم اعداد زیر را که به شکل توان ۱۰ نوشته شده بنویسید :

$$0,00001 = 10^{-5}$$

$$100 = 10^2$$

$$269 = 10^{2,4297}$$

$$51 = 10^{1,7076}$$

$$\sqrt[4]{10^3} = 10^{0,75}$$

$$\sqrt{10} = 10^{0,5}$$

۲ - تساویهای لگاریتمی زیر را به تساویهایی از توان ۱۰ تبدیل کنید :

$$\log 0,01 = -2$$

$$\log 290 = 2,4624$$

$$\log 2 + \log 3 = 0,3010 + 0,4771 = 0,7781$$

$$\log(2 \times 3) = \log 6 = 0,7781$$

$$\log(2 \times 3) = \log 2 + \log 3 \quad \text{بنابراین:}$$

مطلب فوق را به طریق زیر استدلال می‌کنیم:

$$\text{اگر } \log M = x \text{ و } \log N = y \text{ و } \log P = z \text{ داریم:}$$

$$M = 10^x \text{ و } N = 10^y \text{ و } P = 10^z$$

$$M \cdot N \cdot P = 10^x \times 10^y \times 10^z = 10^{x+y+z} \quad \text{و}$$

$$\log(M \cdot N \cdot P) = x + y + z = \log M + \log N + \log P \quad \text{پس}$$

$$\boxed{\log(M \cdot N \cdot P) = \log M + \log N + \log P}$$

۱۵- لگاریتم خارج قسمت دو عدد مثبت برابر است با

لگاریتم مقسوم منه‌ای لگاریتم مقسوم علیه. یعنی:

$$\log \frac{M}{N} = \log M - \log N$$

زیرا اگر داشته باشیم:

$$\log M = x \text{ و } \log N = y$$

$$M = 10^x \text{ و } N = 10^y \quad \text{داریم:}$$

$$\frac{M}{N} = \frac{10^x}{10^y} = 10^{x-y} \quad \text{و از آنجا:}$$

$$\log \frac{M}{N} = x - y = \log M - \log N \quad \text{پس:}$$

$$\boxed{\log \frac{M}{N} = \log M - \log N}$$

$$\log \frac{1}{3} = \log 1 - \log 3 = 0,9031 - 0,4771 = 0,4260 \quad \text{مثلاً:}$$

در حالت مخصوص که مقسوم برابر ۱ است خواهیم داشت:

$$\log \frac{1}{N} = \log 1 - \log N = 0 - \log N = -\log N$$

$$\log \frac{1}{N} = -\log N \quad \text{و از آنجا:}$$

$$\log \frac{1}{6} = -\log 6 = -0,7781 \quad \text{مثلاً:}$$

چون در محاسبات بهتر است مانتیس لگاریتم اعداد مثبت باشد

از این جهت  $-\log 6$  را چنین می‌نویسیم:

$$-\log 6 = -0,7781 + 1 - 1 = -1 + 0,2219 = \bar{1},2219$$

$\bar{1},2219$  را که برابر  $-\log 6$  است  $\text{colog } 6$  (کلگاریتم) می‌گویند.

بطور کلی: منهای لگاریتم هر عدد را کلگاریتم آن عدد می‌نامند.

$$\boxed{\log \frac{1}{N} = -\log N = \text{colog } N}$$

نتیجه - لگاریتم خارج قسمت دو عدد مثبت مساوی است با مجموع

لگاریتم مقسوم و کلگاریتم مقسوم علیه. یعنی:

$$\boxed{\log \frac{M}{N} = \log M + \text{colog } N}$$

۱۶- لگاریتم قوه  $m$  ام هر عدد مثبت مساوی است با  $m$

برابر لگاریتم همان عدد. یعنی:

$$\boxed{\log A^m = m \log A}$$

زیرا اگر داشته باشیم:  $\log A = x$  یا  $A = 10^x$

$$A^m = 10^{mx} \quad \text{داریم:}$$

و از آنجا :  $\log A^m = \log 10^{mx} = mx = m \log A$

مثلاً :  $\log 2^3 = 3 \log 2 = 3 \times 0,3010 = 0,9030$

نتیجه - چون  $\sqrt[n]{A} = A^{\frac{1}{n}}$  ، بنابراین :

$$\log \sqrt[n]{A} = \log A^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log A$$

یعنی : لگاریتم ریشه  $n$  ام يك عدد مساوی است با  $\frac{1}{n}$  لگاریتم آن عدد.

☆☆☆

### اعمال مربوط به لگاریتم

در محاسبه‌های لگاریتمی ، که بعداً خواهید دید ، اغلب اتفاق می‌افتد که بخواهیم چند لگاریتم را با هم جمع کنیم . یا يك لگاریتم را در عددی ضرب یا بر عددی تقسیم کنیم . یا کلاً لگاریتم يك عدد را از روی لگاریتم آن تعیین کنیم . راه انجام دادن این اعمال چنین است :

۱۷ - برای جمع کردن لگاریتمها ، قسمت‌های اعشاری آنها را که مثبت است جمع می‌کنیم و واحدهای صحیح حاصل را ( اگر وجود داشته باشد ) بر مجموع جبری مفسرها می‌افزاییم .

مثلاً اگر لگاریتم سه عدد بترتیب  $1/4542$  ،  $2/5237$  و  $4/7391$  باشد . مجموع آنها چنین بدست می‌آید :

$$1/4542 +$$

$$2/5237$$

$$4/7391$$

---


$$0,7170$$

۱۸ - چنانکه می‌دانیم کلاً لگاریتم هر عدد مانند  $N$  مساوی  $-\log N$  است ، مثلاً اگر داشته باشیم  $\log N = 3/7318$  ، داریم :

$$\text{colog } N = -\log N = -(3/7318)$$

چون در محاسبه‌ها ، همانطور که گفتیم ، باید قسمت مانع را مثبت بنویسیم ،  $\text{colog } N$  را می‌نویسیم :

$$\text{colog } N = -(3/7318) = -(-3 + 0,7318) = 3 - 0,7318 = 2,2682$$

به همین ترتیب اگر داشته باشیم :  $\log P = 2/1736$

داریم :  $\text{colog } P = -2/1736 = -2 - 0,1736$

$$= -2 - 1 + 1 - 0,1736 = -3 + 0,8264 = 3/8264$$

از دو مثال فوق قاعده زیر برای تعیین کلاً لگاریتم يك عدد ، از روی لگاریتم آن بدست می‌آید :

برای نوشتن کلاً لگاریتم يك عدد ، اولین رقم بامعنای سمت راست قسمت اعشاری لگاریتم آن را از ۱۰ و رقمهای سمت چپ آن را از ۹ کم می‌کنیم تا قسمت اعشاری کلاً لگاریتم بدست آید ، سپس مفسر لگاریتم را با ۱ جمع می‌کنیم و آن را تغییر علامت می‌دهیم تا مفسر کلاً لگاریتم بدست آید .

( امتحان درستی عمل آن است که مجموع کلاً لگاریتم و لگاریتم

صفر باشد ) . بدین ترتیب :

اگر  $\log x = 1/1082$  باشد ،  $\text{colog } x = 0,8918$

و اگر  $\log y = 0,8080$  باشد ،  $\text{colog } y = 1/1920$

۱۹ - برای ضرب کردن يك عدد صحیح در لگاریتم يك عدد ،

آن عدد صحیح را در قسمت اعشاری لگاریتم ضرب می‌کنیم و واحدهای

صحیح حاصل ضرب را (اگر وجود داشته باشد) برحاصل ضرب آن عدد صحیح در مفسر می‌افزاییم:

$$7 \times 1 / 8346 = 2 / 8422$$

(زیرا  $7 \times 0 / 8346 = 5 / 8422$  و  $7 \times 1 = -7$  و  $-7 + 5 = -2$ )

۲۰- برای تقسیم کردن يك لگاریتم بر يك عدد صحیح ، اگر مفسر لگاریتم مثبت یا صفر باشد تقسیم را بر طبق قاعده تقسیم اعداد اعشاری بر عدد صحیح انجام می‌دهیم .

$$\frac{1}{3} \log x = \frac{2 / 7315}{3} = 0 / 9105 \text{ ، باشد } \log x = 2 / 7315$$

اما اگر مفسر لگاریتم منفی باشد در صورت لزوم با افزودن و کاستن يك عدد صحیح شایسته ، آن لگاریتم را به مجموع يك عدد جبری مثبت و يك عدد صحیح منفی چنان تبدیل می‌کنیم که عدد منفی بر مقسوم علیه قابل قسمت باشد ، بعد این مجموع جبری را بر آن عدد صحیح تقسیم می‌کنیم . مثلاً اگر:  $\log y = 4 / 5128$  باشد :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \log y &= \frac{1}{3} (4 / 5128) = \frac{1}{3} (-4 - 2 + 2 / 5128) \\ &= \frac{1}{3} (-6 + 2 / 5128) = 2 / 8376 \end{aligned}$$

و اگر  $\log z = -7$  باشد :

$$\frac{1}{5} \log z = \frac{1}{5} (-7) = \frac{1}{5} (-7 - 3 + 3) = \frac{1}{5} (-10 + 3) = 2 / 6$$

### محاسبه به وسیله لگاریتم

۲۱- با استفاده از قضایای قبل می‌توانیم :

(۱) برای محاسبه حاصل ضرب چند عدد مثبت لگاریتم‌های آن اعداد را با هم جمع کنیم و عدد ما بازای آن مجموع را که همان حاصل

ضرب مطلوب است بدست آوریم .

(۲) برای محاسبه قوه  $n$  ام يك عدد مثبت ، عدد ما بازای  $n$  برابر لگاریتم آن عدد را بدست آوریم .

(۳) برای محاسبه ریشه  $n$  ام يك عدد مثبت ، عدد ما بازای  $\frac{1}{n}$  لگاریتم آن را بدست آوریم .

(۴) برای محاسبه خارج قسمت دو عدد ، لگاریتم مقسوم را با کلگاریتم مقسوم‌علیه جمع کنیم و عدد ما بازای مجموع را بدست آوریم . اینك چند مثال:

۲۲- برای محاسبه حاصل ضرب  $347 \times 5 / 68 \times 0 / 01234$  ، اگر این حاصل ضرب را  $P$  بنامیم ، چنین عمل می‌کنیم :

$$\log P = \log 347 + \log 5 / 68 + \log 0 / 01234$$

با استفاده از جدول لگاریتم خواهیم داشت :

$$\log P = 2 / 5403 + 0 / 7543 + 2 / 0913 = 1 / 3859$$

که عدد ما بازای  $1 / 3859$  یعنی  $24 / 32$  مقدار تقریبی حاصل ضرب

$$P \approx 24 / 32 \text{ . مطلوب است .}$$

۲۳- برای محاسبه قوه هفتم  $1 / 35$  ، اگر فرض کنیم که  $x = (1 / 35)^7$  خواهیم داشت :

$$\log x = 7 \log 1 / 35 = 7 \times 0 / 1303 = 0 / 9121$$

که عدد ما بازای  $0 / 9121$  یعنی  $8 / 168$  مقدار تقریبی قوه هفتم  $1 / 35$

$$(1 / 35)^7 \approx 8 / 168 \text{ است .}$$

۲۴- برای محاسبه ریشه پنجم  $0 / 075$  ، اگر فرض کنیم که  $x = \sqrt[5]{0 / 075}$  خواهیم داشت :

$$\log x = \frac{1}{5} \log 0,075 = \frac{1}{5} (-2,1251)$$

$$= \frac{1}{5} (-5 + 3,8751) = 1,7750$$

$$\sqrt[5]{0,075} \approx 0,5957 \quad \text{یعنی:}$$

$$\text{۲۵- مقدار کسر } x = \frac{5/47 \times \sqrt[3]{3/43}}{2^2 \times \sqrt[4]{5/238}}$$

لگاریتم می توان چنین محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} \log x &= \log(5/47 \times \sqrt[3]{3/43}) + \text{colog}(2^2 \times \sqrt[4]{5/238}) \\ &= \log 5/47 + \frac{1}{3} \log 3/43 + \frac{3}{4} \text{colog } 2 + \frac{1}{4} \text{colog } 5/238 (*) \end{aligned}$$

برای اینکه محاسبه عباراتی نظیر عبارت فوق به وسیله لگاریتم مشخص و بدون اشتباه باشد، همیشه باید محاسبه را طبق نمونه زیر مرتب نوشت:

$$x = \frac{5/47 \times \sqrt[3]{3/43}}{2^2 \times \sqrt[4]{5/238}} \quad \text{محاسبه}$$

$$\log x = \log 5/47 + \frac{1}{3} \log 3/43 + \frac{3}{4} \text{colog } 2 + \frac{1}{4} \text{colog } 5/238$$

$$\begin{aligned} \text{colog}(a \cdot b) &= -\log(a \cdot b) = -\log a - \log b (*) \\ &= \text{colog } a + \text{colog } b \end{aligned}$$

$$\text{colog } a^m = -\log a^m = -m \log a = m(-\log a) = m \text{colog } a$$

محاسبه های فرعی

$$: \frac{1}{3} \log 3/43$$

$$\log 3/43 = 0,5253$$

$$\frac{1}{3} \log 3/43 = 0,1751$$

$$: \frac{3}{4} \text{colog } 2$$

$$\log 2 = 0,3010$$

$$\text{colog } 2 = 1,6990$$

$$3 \text{colog } 2 = 1,0970$$

$$\frac{3}{4} \text{colog } 2 = \frac{1}{4} (1,0970) = 1,5485$$

$$: \frac{1}{4} \text{colog } 5/238$$

$$523 \quad 7185$$

D=8

$$8 \quad 6/4$$

$$\log 5/238 = 0,7191$$

$$\text{colog } 5/238 = 1,2809$$

$$\frac{1}{4} \text{colog } 5/238 = 1,8202$$

$$\log x = 0,2851$$

$$: 0,2851 \quad \text{محاسبه عدد ما بازای}$$

$$2833 \quad 192$$

D=23

$$18 \quad 8$$

$$0,2851 = \log 1/928$$

$$x \approx 1/928 \quad \text{نتیجه}$$

توجه کنید: ۱) مقدار عباراتی که به وسیله لگاریتم حساب می شود عموماً تقریبی است (زیرا لگاریتمهایی که در جدول نوشته شده عموماً تقریبی است).

۲) چون اعداد منفی لگاریتم ندارند، اگر مقدار يك عبارت



منفی را بخواهیم حساب کنیم، کافی است که ابتدا قدر مطلق آن را به وسیله لگاریتم حساب کنیم و بعد حاصل را تغییر علامت دهیم.

تعرین

مطلوب است تعیین لگاریتم عبارات زیر :

$$n = \sqrt{\frac{ab}{mn^2}} \quad -۳ \times \quad n = \frac{\sqrt{b}}{a^2} \quad -۴ \times \quad n = \frac{\sqrt[4]{a^2 b^2}}{3a^2 b^2} \quad -۱ \times$$

مطلوب است تعیین x در صورتی که :

$$\log x = \frac{1}{4} \log a * \frac{2}{3} \log b + 2 \log c + \frac{1}{4} \log d \quad -۴ \times$$

$$10^{5x} = 0.0654 \quad -۶ \times \quad \log x + \log 2x = 2 \quad -۵ \times$$

مقدار عددی عبارتهای زیر را به کمک لگاریتم حساب کنید :

۳۶۰	-۸۸	۲۴۰ = n	-۷.۱۷
$\sqrt[4]{76971}$	-۱۰	$(1/2)^{40}$	-۹.۱۷
$\sqrt[4]{2,7967}$	-۱۲	$(1/3)^0$	-۱۱.۱۷
$1/7 \times \sqrt[4]{(200047)^2}$	-۱۴	$2/47 \times (3/22)^2$	-۱۳.۱۷
$\frac{(437)^2}{(2/7)^2}$	-۱۶	$37/4(35/9)^2$	-۱۵.۱۷
$\frac{0.73}{6/82 \times 0.042}$	-۱۸	$\frac{470 \times 0.749}{7342}$	-۱۷.۸
$\sqrt[5]{0.349}$	-۲۰	$\sqrt[7]{421}$	-۱۹.۸
$(267/9)^{5/2}$	-۲۲	$\sqrt{\frac{25/7}{4/397}}$	-۲۱.۸
$\sqrt[5]{549.05}$	-۲۴	$\sqrt[5]{549.50 \times (12/1)^5}$	-۲۳.۸

$$(-8/4)^{2/3} \quad -۲۵ \quad \sqrt[5]{0.40 \times (12/7)^2} \quad -۲۶ \times$$

$$\sqrt{\frac{4}{73} \times \frac{0.0491 \times (120)^2}{1/21 \times 47}} \quad -۲۷.۸$$

$$\frac{2/365 \times 45/98}{(0.00743)^2} \quad -۲۸.۸$$

$$\frac{756}{(2/1)^4} \sqrt{\frac{3/27 \times (51)^9}{(1/00007)^4}} \quad -۲۹.۸$$

۳۰ - مطلوب است محاسبه عبارت  $3a^2b$  در صورتی که :

$$\log a = 3/4125 \text{ و } \log b = 2/2095$$

۳۱ - اگر  $\log 2 = 0.3010$  و  $\log 3 = 0.4771$  باشد، بدون مراجعه

به جدول لگاریتم، مطلوب است محاسبه لگاریتم اعداد ۲۸۸ و ۳۶۰.

۳۲ - به ازای چه مقادیر a معادله  $2a + \log a = 0$  دارای ریشه‌های

حقیقی است ؟

۳۳ - ثابت کنید که  $(\frac{86}{85})^{1000}$  از صد هزار بزرگتر است.

۳۴ - تساوی زیر را ثابت کنید :

$$\log \frac{11}{15} + \log \frac{490}{297} - 2 \log \frac{7}{9} = \log 2$$

### خلاصه مطالب مهم :

- ۱ - اگر  $N = 10^x$  باشد لگاریتم  $N$  در پایه ۱۰ مساوی است با  $x$  یعنی :  
 $\log N = x$
- ۲ - لگاریتم حاصل ضرب دو یا چند عدد مثبت برابر است با مجموع لگاریتمهای آن دو یا چند عدد.
- ۳ - لگاریتم خارج قسمت دو عدد مثبت برابر است با لگاریتم مقسوم منهای لگاریتم مقسوم علیه .
- ۴ - لگاریتم عکس هر عدد مساوی است با قرینه لگاریتم آن عدد و قرینه لگاریتم يك عدد را لگاریتم آن عدد می نامند .
- ۵ - لگاریتم توان  $m$ ام هر عدد مثبت ، مساوی  $m$  برابر لگاریتم آن عدد است .
- ۶ - لگاریتم ریشه  $m$ ام هر عدد مثبت برابر است با  $\frac{1}{m}$  لگاریتم آن عدد .
- ۷ - اگر پایه لگاریتم ۱۰ باشد آن را لگاریتم اعشاری می نامیم .
- ۸ - لگاریتم توانهای صحیح ۱۰ عدد صحیح است .
- ۹ - لگاریتم يك عدد شامل دو جزء صحیح و اعشاری است . جزء صحیح را مفسر و جزء اعشاری را ماننثیس لگاریتم می نامیم .
- ۱۰ - اگر عددی را در قوای صحیح ۱۰ ضرب یا بر آن تقسیم کنیم در ماننثیس لگاریتم آن تغییری رخ نمی دهد .
- ۱۱ - مفسر لگاریتم عددی بزرگتر از يك ، مساوی است با عدد ارقام صحیح آن عدد منهای يك .
- ۱۲ - مفسر لگاریتم عددی کوچکتر از يك ، عددی است منفی که قدر مطلق آن مساوی عدد صفرهایی است که در چپ اولین رقم سمت چپ آن عدد است (با منظور نمودن صفر سمت چپ ممیز) .
- ۱۳ - ماننثیس یا جزء اعشاری لگاریتم را از روی جدول لگاریتم بدست می آورند .

- ۱۴ - اگر لگاریتم عددی معلوم باشد و بخواهیم آن را به كمك جدول لگاریتم پیدا کنیم ، آنتی لگاریتم یا عدد ما بازای آن عدد را پیدا می کنیم .
- ۱۵ - برای نوشتن كل لگاریتم يك عدد ، اولین رقم راست قسمت اعشاری لگاریتم آن را از ۱۰ و رقمهای سمت چپ آن را از ۹ كم می کنیم تا قسمت اعشاری كل لگاریتم بدست آید . سپس مفسر لگاریتم را با ۱+ جمع می کنیم و آن را تغییر علامت می دهیم تا مفسر كل لگاریتم بدست آید .
- ۱۶ - برای ضرب کردن عدد صحیح در لگاریتم يك عدد ، آن عدد صحیح را در قسمت اعشاری لگاریتم ضرب می کنیم و واحدهای صحیح حاصل ضرب را (اگر وجود داشته باشد) به حاصل ضرب آن عدد در مفسر می افزاییم .
- ۱۷ - برای تقسیم کردن يك لگاریتم بر يك عدد صحیح ، اگر مفسر لگاریتم مثبت یا صفر باشد تقسیم را بر طبق قاعده تقسیم اعداد اعشاری بر عدد صحیح انجام می دهیم . اما اگر مفسر لگاریتم منفی باشد در صورت لزوم با افزودن و کاستن عدد صحیح مناسبی آن لگاریتم را به مجموع يك عدد جبری مثبت و يك عدد صحیح منفی تبدیل می کنیم بطوری که عدد صحیح منفی بر مقسوم علیه قابل قسمت باشد و بعد این مجموع جبری را بر آن عدد صحیح تقسیم می کنیم .

## فصل دوم

خود را امتحان کنید :

### تصادف

#### الف - تصاعد عددی (حسابی)

۱- چوپانی صدگوسفند داشت . پیش خود قرار گذاشت که سالی ۲۵ رأس بر گوسفندهایش اضافه کند . می بینیم که تعداد گوسفندهایش تا سال چهارم چنین می شود :

اول	دوم	سوم	چهارم
۱۰۰	۱۲۰	۱۴۰	۱۶۰

این رشته اعداد ۱۰۰ ، ۱۲۰ ، ۱۴۰ و ۱۶۰ که هر يك مساوی عدد ماقبل به اضافه عدد ثابت ۲۰ است **تصادف حسابی** نامیده می شود . عدد ۱۰۰ را جمله اول و عدد ۲۰ را قدر نسبت و عدد ۱۶۰ را جمله آخر تصاعد حسابی می نامند . بطور کلی :

هرگاه چند عدد به دنبال هم بطریقی نوشته شده باشند که هر يك از آنها مساوی با مجموع عدد پیش از خود و يك عدد ثابت باشد ، گوییم این چند عدد تشکیل تصاعد عددی (یا حسابی) داده اند .

هر يك از این اعداد را يك جمله تصاعد و عدد ثابت را که باید با هر جمله جمع کرد تا جمله بعد بدست آید قدر نسبت تصاعد می گویند .

- ۱ - لگاریتم عدد  $n$  یعنی چه ؟
- ۲ - چرا اعداد منفی لگاریتم ندارند ؟
- ۳ - مفسر و مانتیس یعنی چه ؟ مفسر لگاریتم يك عدد را چگونه حساب می کنند ؟
- ۴ - لگاریتم ۱ چقدر است ؟ لگاریتم ۱۰ چقدر است ؟
- ۵ - لگاریتم حاصل ضرب دو عدد ، مساوی با چیست ؟
- ۶ - ریشه پنجم يك عدد را به چه وسیله حساب می کنند ؟
- ۷ - عدد ما بازا یعنی چه ؟
- ۸ - کلگاریتم يك عدد چیست ؟ کلگاریتم ۱۰۰ چقدر است ؟
- ۹ - کلگاریتم  $۵۶/۵$  بین کدام دو عدد است ؟
- ۱۰ - اگر عددی را در قوای صحیح ۱۰ ضرب کنیم در لگاریتم آن چه تغییری پیدا می شود ؟
- ۱۱ - مانتیس لگاریتم اعداد را به چه وسیله تعیین می کنند ؟ اگر مانتیس لگاریتمی منفی باشد چگونه آن را مثبت می کنند ؟
- ۱۲ - اگر مفسر لگاریتمی منفی باشد ، چگونه آن را در يك عدد ضرب یا بريك عدد تقسیم می کنند ؟
- ۱۳ - لگاریتم عددی را که در جدول نیست چگونه حساب می کنند ؟ آنتی لگاریتم یعنی چه ؟
- ۱۴ - اگر لگاریتم عدد معینی را در ۳ ضرب کنیم و عدد ما بازای آن را بدست آوریم ، چه رابطه ای بین این دو عدد وجود دارد ؟
- ۱۵ - اگر لگاریتم عدد معینی را با ۳ جمع کنیم و عدد ما بازای آن را بدست آوریم ، چه رابطه ای بین این دو عدد وجود دارد ؟

مثلاً دسته اعداد :

$$۳، ۷، ۱۱، ۱۵، ۱۹، ۲۳$$

تشکیل يك تصاعد عددی می دهند که قدر نسبت آن ۴ است و اعداد ۳ و ۷ و ۱۱ و ۱۵ و ۱۹ و ۲۳ جمله های آنند . ۳ را جمله اول و ۷ را جمله دوم و ۲۳ را جمله ششم یا **جمله آخر** می گویند . هر تصاعد عددی مانند :  
۳، ۷، ۱۱، ۱۵، ۱۹، ۲۳ را چنین نمایش می دهیم :

$$\div ۳ . ۷ . ۱۱ . ۱۵ . ۱۹ . ۲۳$$

یعنی در سمت چپ جمله اول علامت  $\div$  را ، که علامت تصاعد حسابی است ، می نویسیم و بین جمله ها نقطه می گذاریم .

**۲-** واضح است که اگر جمله اول و قدر نسبت يك تصاعد عددی معلوم باشد می توانیم جمله های دوم و سوم و .... را چنین حساب کنیم :  
جمله اول را با قدر نسبت جمع کنیم تا جمله دوم بدست آید و بعد جمله دوم را با قدر نسبت جمع کنیم تا جمله سوم معلوم شود و به همین ترتیب سایر جمله را یکی پس از دیگری حساب کنیم . مثلاً اگر جمله اول يك تصاعد عددی ۲- و قدر نسبت آن ۵ باشد ، جمله دوم آن  $۳ = ۲ + ۵$  و جمله سوم آن  $۸ = ۳ + ۵$  است و آن تصاعد چنین می شود :

$$\div -۲ . ۳ . ۸ . . . . .$$

و اگر جمله اول يك تصاعد عددی ۷ و قدر نسبت آن ۳- باشد ، پنج جمله اول این تصاعد چنین است :  $-۲ . -۵ . ۱۰ . ۴ . ۷$   $\div$   
می بینیم که :

عدد جمله يك تصاعد عددی هر چه باشد ، با داشتن جمله اول و قدر نسبت ، تمام جمله های آن ، یکی پس از دیگری ، بدست می آید .

**۳-** هر گاه در يك تصاعد عددی قدر نسبت مثبت باشد جمله های تصاعد رفته رفته بزرگ می شوند ، در این صورت تصاعد عددی را **صعودی** می گوئیم . هر گاه قدر نسبت منفی باشد جمله ها رفته رفته کوچک می شوند و تصاعد عددی را **نزولی** می نامیم .

**۴-** محاسبه جمله  $n$ ام يك تصاعد عددی بر حسب جمله اول و قدر نسبت .

اگر در تصاعد عددی جمله اول برابر  $a$  و قدر نسبت برابر  $d$  باشد ، چنانکه گفته شد مقدار جمله های اول ، دوم ، سوم ، .... و  $n$ ام این تصاعد ، که آنها را بترتیب با  $t_1$  ،  $t_2$  ،  $t_3$  ، .... ،  $t_n$  نمایش می دهیم ، چنین است :

$$t_1 = a$$

$$t_2 = a + d$$

$$t_3 = a + 2d$$

$$t_4 = a + 3d$$

$$. . . . .$$

$$. . . . .$$

$$t_n = a + (n-1)d$$

**مثال -** جمله پانزدهم يك تصاعد عددی که جمله اولش ۵- و قدر نسبتش ۳ باشد برابر است با :

$$-۵ + (۱۵-۱) \times ۳ = ۳۷$$

معمولاً جمله آخر يك تصاعد عددی را با حرف  $l$  نمایش می دهند .

بنابراین در يك تصاعد عددی که  $n$  جمله داشته باشد جمله آخر آن  $l$  چنین می شود :

$$(۱) \quad l = a + (n-1)d$$

**مثال - محاسبه  $n$ امین عدد فرد از يك به بالا -** سلسله اعداد فرد، تصاعدی عددی تشکیل می دهند که جمله اولش ۱ و قدر نسبتش ۲ است، پس :

$$l = 1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1$$

از این رو هفدهمین عدد فرد ۱ یا ۳۳ است .

**دقت کنید !** از روی دستور ۱ می توان یکی از چهار مقدار  $a$  ،  $l$  ،  $n$  و  $d$  از يك تصاعد عددی را با داشتن سه مقدار دیگر حساب کرد. مثلاً قدر نسبت تصاعد عددی که جمله اول آن  $a$  و جمله آخرش  $l$  و عدد جمله های آن  $n$  باشد برابر است با :

$$(۲) \quad d = \frac{l-a}{n-1}$$

**۵- درج چند واسطه عددی بین دو عدد مفروض -** اگر بین دو عدد معلوم چند عدد طوری بنویسیم که دسته اعداد حاصل تشکیل يك تصاعد عددی بدهند ، می گویند که بین آن دو عدد چند واسطه عددی درج شده است .

مثلاً اگر بخواهیم بین دو عدد ۱ و ۲۵ هفت واسطه عددی درج کنیم چنین عمل می کنیم : چون از تصاعدی که بوجود خواهد آمد جمله اول و جمله آخر و شماره جمله ها را به این ترتیب داریم :

$$a=1, l=25, n=7+2=9, \text{ قدر نسبت را از روی دستور } 2$$

پیدا می کنیم :

$$d = \frac{25-1}{9-1} = 3$$

بنابراین بین دو عدد ۱ و ۲۵ هفت واسطه عددی چنین درج می شود :

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25$$

و هفت واسطه عددی بین آن دو عدد معلوم از این قرارند :

$$4, 7, 10, 13, 16, 19, 22$$

**يك اصطلاح -** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو جمله از تصاعدی باشند که تعداد جمله های قبل از  $\alpha$  مساوی تعداد جمله های بعد از  $\beta$  باشد ، آن دو جمله را **متساوی البعد** از طرفین می نامیم .

**۶- قضیه -** در هر تصاعد حسابی حاصل جمع هر دو جمله متساوی البعد از طرفین ، مساوی مجموع دو جمله اول و آخر است .

**برهان -** فرض می کنیم که در تصاعد :

$$1, 2, 3, \dots, \beta, \dots, \alpha, \dots, b, a$$

$d$  قدر نسبت و دو جمله  $\alpha$  و  $\beta$  متساوی البعد از طرفین باشند . اگر عدد  $m$  برابر  $\alpha$  باشد ، جمله  $(m+1)$ ام تصاعد و مقدار آن طبق دستور چنین است :

$$\alpha = a + md$$

حال اگر  $\beta$  را جمله اول تصاعد فرض کنیم ، می بینیم که  $l$  جمله

$$(m+1) \text{ام است . بنابراین : } l = \beta + md$$

پس از حذف  $md$  بین این دو تساوی نتیجه می شود که :

$$\alpha + \beta = a + l$$

**نتیجه** - اگر عددی جمل یک تصاعد عددی فرد باشد، جمله وسط برابر است با نصف مجموع دو جمله طرفین آن تصاعد (چرا؟).

نصف مجموع دو عدد را **واسطه عددی** آن دو می نامند. بنابراین هر سه عدد که تشکیل یک تصاعد عددی بدهند، عدد وسط واسطه عددی دو عدد دیگر است. بنابراین در هر تصاعد عددی هر جمله، واسطه عددی دو جمله همجوار خود می باشد.

**۷ - محاسبه مجموع جمله های یک تصاعد حسابی -** اگر مجموع جمله های تصاعد حسابی  $n$  جمله ای  $1 \cdot h \cdot k \cdot \dots \cdot c \cdot b \cdot a$  را  $S$  بنامیم، داریم:

$$S = a + b + c + \dots + k + h + l$$

$$S = l + h + k + \dots + c + b + a$$

طرفین این دو تساوی را نظیر بنظیر جمع می کنیم:

$$2S = (a+l) + (b+h) + (c+k) + \dots + (k+c) + (h+b) + (l+a)$$

هر یک از پرانتزهای طرف دوم مجموع دو جمله متساوی البعد از طرفین تصاعد است که می دانیم برابر مجموع  $a+l$  است. اما عدد پرانتزها مساوی است با عدد جمله ها، یعنی  $n$ . بنابراین:

$$2S = n(a+l)$$

$$S = \frac{n(a+l)}{2}$$

(۳)

اگر در این رابطه به جای  $l$  مقدارش را بر حسب  $a$ ،  $n$  و  $d$  قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$S = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

**مثال ۱ -** مجموع  $n$  عدد صحیح متوالی که از ۱ شروع می شود، چنین است:

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

زیرا این اعداد تشکیل یک تصاعد عددی می دهند که جمله اول و جمله آخر و عدد جمله هایش به ترتیب ۱،  $n$  و  $n$  است.

**مثال ۲ -** مجموع  $n$  عدد فرد متوالی که از ۱ شروع می شود،  $n^2$  است؛ زیرا این اعداد تشکیل یک تصاعد عددی می دهند که جمله اول آن ۱ و قدر نسبت آن ۲ و عدد جمله هایش  $n$  است.

$$S = \frac{n[1 + (n-1) \times 2]}{2} = n^2$$

**دقت کنید!** اگر دو مقدار از پنج مقدار  $a$ ،  $l$ ،  $d$ ،  $n$  و  $S$  مجهول باشد، می توان آنها را از دستگاه زیر حساب کرد:

$$\begin{cases} l = a + (n-1)d \\ S = \frac{n(a+l)}{2} \end{cases}$$

**مثال -** جمله اول یک تصاعد عددی ده جمله ای، ۵ و مجموع جمل آن ۱۸۵ است؛ قدر نسبت و جمله آخر آن را حساب کنید. در اینجا دستگاه دو مجهولی زیر را داریم:

(۱۷) جمله n ام تصاعد عددی ... ۲ . ۴ . ۶ ... را حساب کنید .

(۱۸) جمله n ام تصاعد عددی ...  $\frac{a}{b}$  .  $\frac{a-1}{b}$  ... را حساب کنید .

(۱۹) مجموع بیست جمله از تصاعد عددی ... ۲۸ . -۲ ... را حساب کنید .

(۲۰) مجموع نه جمله از تصاعد عددی ... ۱۱ . ۲۵ ... را حساب کنید .

(۲۱) مجموع دوازده جمله از تصاعد عددی ... ۱۰ . ۱۴ ... را حساب کنید .

(۲۲) يك تصاعد حسابی بنویسید که پنجمین جمله اش ۶ و دهمین جمله اش ۸ باشد .

(۲۳) در يك تصاعد عددی  $n=12$  ،  $a=1$  و  $d = \frac{2}{3}$  حساب کنید

l و S را .

(۲۴) در يك تصاعد عددی  $a=65$  و  $n=9$  و  $S=332$  حساب کنید

d و l را .

(۲۵) بر محیط دایره ای پانزده نقطه واقع است . از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می کنیم . تعیین کنید عده وترهای حاصل را .

(۲۶) اگر اعداد a ، b و c جمله های متوالی يك تصاعد حسابی باشند ،

ثابت کنید که اعداد  $a^2+ab+b^2$  ،  $b^2+bc+c^2$  و  $c^2+ac+a^2$  نیز تشکیل يك تصاعد حسابی می دهند .

(۲۷) تحقیق کنید که مربعات عبارات :  $x^2-2x-1$  و  $x^2+1$

و  $x^2+2x-1$  جمله های متوالی يك تصاعد عددی می شوند .

(۲۸)  $S$  و  $S'$  و  $S''$  بترتیب مجموع n جمله اول سه تصاعد عددی است که

جمله اول هر سه ، ۱ و قدر نسبت آنها بترتیب ۱ ، ۲ و ۳ است ، تحقیق کنید

که  $S$  ،  $S'$  و  $S''$  نیز تشکیل يك تصاعد عددی می دهند

(۲۹) اضلاع مثلث قائم الزاویه ای جمله های متوالی يك تصاعد حسابی هستند ؛

ثابت کنید که قدر نسبت این تصاعد مساوی ربع ضلع متوسط آن است و اضلاع این مثلث را می توان به صورت  $3d$  ،  $4d$  و  $5d$  نوشت .

$$\begin{cases} l=5+(10-1)d \\ 185=\frac{10(5+l)}{2} \end{cases}$$

از معادله دوم نتیجه می گیریم که  $l=32$  ؛ آن را در معادله اول

قرار می دهیم ، خواهیم داشت :  $d=3$  یا  $32=5+9d$

### تمرین

هفت جمله اول هر يك از تصاعدهای عددی زیر را بنویسید :

$$\begin{array}{ll} d=-5 \text{ و } a=70 & (۲) \quad d=3 \text{ و } a=2 \\ d=-3 \text{ و } a=-5 & (۴) \quad d=-1 \text{ و } a=15 \\ d=3x-1 \text{ و } a=x & (۶) \quad d=-\frac{5}{2}x \text{ و } a=5x \end{array}$$

کدام دسته از اعداد زیر ، تصاعد حسابی می سازند ؟

$$7\frac{5}{7}, 6\frac{4}{7}, 5\frac{3}{7} \quad (۹) \quad 1, 4, 7, 10 \quad (۱۱) \quad 1, 3, 5, 7 \quad (۱۲)$$

$$3m-6, 2m-3, m \quad (۱۳) \quad 3m^2, 2m^2, m^2 \quad (۱۴) \quad 7, 9, 13 \quad (۱۵)$$

(۱۳) جمله نهم تصاعد عددی ... ۳ . ۱۳ ... را حساب کنید .

(۱۴) جمله هفتم تصاعد حسابی ... ۵ . ۱۱ ... را حساب کنید .

(۱۵) بیستم تصاعد عددی ... m . 5m ... را حساب کنید .

(۱۶) جمله یازدهم تصاعد حسابی ... ۶ . -۸ ... را حساب کنید .



(۳۰) مطلوب است جمله  $n$  ام و حاصل جمع  $n$  جمله اول تصاعد زیر:

$$1, \frac{a-1}{a}, \frac{a-2}{a}, \frac{a-3}{a}, \dots$$

(۳۱) يك تصاعد حسابی تشكيل دهید كه قدر نسبت آن ، واحد و مجموع  $n$  جمله اولش ۳۳ و جمله مرتبه  $n$  ام آن ۸ باشد .

(۳۲) دو متحركه كه به فاصله ۲۰۱۰ متر از يكديگر قرار دارند ، در يك لحظه روبه هم حركت می كنند . اولی در ثانیه اول ۸ متر ، در ثانیه دوم ۱۳ متر ، در ثانیه سوم ۱۸ متر و ... طی می كند . دومی در ثانیه اول ۷ متر ، در ثانیه دوم ۱۱ متر ، در ثانیه سوم ۱۵ متر و ... طی می كند . تعیین كنید پس از چه مدت به هم می رسند ؟ ( دو مسئله ۳۱ و ۳۲ باید بعد از یاد گرفتن حل معادله درجه دوم حل شود ) .

(۳۳) با پهلوی هم و روی هم قرار دادن گلوله های متساوی چدنی ، هرمی می سازیم كه قاعده اش مثلث متساوی الاضلاع و در هر ضلع قاعده ۱۰ گلوله باشد . تعیین كنید : اولاً - شماره گلوله هایی كه در قاعده هرم مصرف می شود . ثانیاً - شماره گلوله هایی را كه هرم با آن ساخته می شود . راهنمایی - گلوله های مثلثی را كه هرم را بوجود می آورند حساب كنید و با هم جمع كنید .

(۳۴) اگر جسمی را رها كنیم كه بیفتد ، با فرض آنكه هوا مقاومتی در مقابل حركت آن جسم نداشته باشد ، یعنی در فضایی خالی از هوا تجربه كنیم ، خواهیم دید كه در ثانیه اول  $4/9$  متر ، در ثانیه دوم  $14/7$  متر ، در ثانیه سوم  $24/5$  متر و ... می پیماید . اولاً - معین كنید در ثانیه دهم چه فاصله ای می پیماید . در ثانیه  $n$  ام چقدر ؟

ثانیاً - اگر در ثانیه دوازدهم به زمین برسد ، از چند متری رها شده

است ؟

my 2 h b

my 6 6

-۳۷-

ب - تصاعد هندسی

۸ - رهنوردی تصمیم گرفت كه هر روز به اندازه دو برابر روز قبل راه برود . اگر در روز اول ۵۰۰ متر راه رفته باشد ، مقدار راهی كه او در روزهای متوالی پیموده است ، چنین می شود :

(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(۵)
۵۰۰	۱۰۰۰	۲۰۰۰	۴۰۰۰	۸۰۰۰

این رشته اعداد و نظایر آن را كه هريك مساوی عدد ماقبل ضرب

در عدد ثابتی است ، تصاعد هندسی می نامند . بطور کلی :

هرگاه چند عدد ، غیر از صفر ، به دنبال هم چنان نوشته شده باشد كه هريك از آنها برابر حاصل ضرب عدد پیش از خودش در يك عدد ثابت باشد ، می گوییم این چند عدد يك تصاعد هندسی تشكيل می دهند .

هر يك از آن اعداد را يك جمله تصاعد و عدد ثابت را قدر نسبت

آن تصاعد می نامیم . مثلاً دسته پنج عدد : ۳۲۴ ، ۱۰۸ ، ۳۶ ، ۱۲ و ۴

تشكيل يك تصاعد هندسی می دهد كه قدر نسبت آن ۳ است ؛ زیرا هريك

از این اعداد سه برابر عدد سمت چپ خودش می باشد . اعداد ۴ و ۱۲ و

۳۶ و ۱۰۸ و ۳۲۴ جمله های این تصاعدند . اعداد ۴، ۱۲ و ۳۲۴ را بترتیب

جمله اول ، جمله دوم و جمله آخر این تصاعد می نامیم .

هر تصاعد هندسی ، مثلاً تصاعد بالا را چنین نمایش می دهیم :

$$324 : 108 : 36 : 12 : 4 ::$$

یعنی در سمت چپ علامت (::) را ، كه علامت تصاعد هندسی است ،

می‌گذاریم ، و در میان جمله‌ها علامت (:) را می‌گذاریم . بنابراین وقتی

$$\text{که می‌نویسیم: } \frac{2}{3} : 2 :: 2$$

مقصود آن است که ۲ و  $\frac{2}{3}$  دو جمله اول و دوم يك تصاعد هندسی است . واضح است که اگر جمله اول و قدر نسبت يك تصاعد هندسی معلوم باشد ، می‌توان جمله‌های دیگر را یکی پس از دیگری حساب کرد . همچنین اگر دو جمله متوالی از يك تصاعد هندسی معلوم باشد ، می‌توان به وسیله عمل تقسیم ، قدر نسبت و سپس سایر جمله‌های آن تصاعد را معلوم کرد .

**دقت کنید!** در يك تصاعد عددی یا حسابی ممکن است یکی از جمله‌ها صفر باشد اما در تصاعد هندسی ، با فرض صفر نبودن اولین عدد ، هیچیک از جمله‌های دیگر صفر نخواهد شد ، و با صفر بودن اولین عدد همه اعداد دیگر صفر خواهد بود که مخالف تعریف تصاعد هندسی است .

#### ۹- محاسبه جمله n ام يك تصاعد هندسی بر حسب جمله اول

**وقدر نسبت** - جمله‌های تصاعد هندسی را بترتیب  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$  می‌نامیم . اگر جمله اول  $a$  و قدر نسبت  $q$  باشد داریم :

$$t_1 = a, t_2 = aq, t_3 = aq^2, t_4 = aq^3, \dots, t_n = aq^{n-1}$$

پس اگر تصاعد فقط  $n$  جمله داشته باشد ، جمله آخر که همان

جمله  $n$ ام است و آن را  $l$  می‌نامیم ، از این دستور بدست می‌آید :

$$(۱) \quad \boxed{l = aq^{n-1}}$$

مثلاً جمله ششم يك تصاعد هندسی که جمله اولش  $a = ۴$  و قدر

نسبتش  $q = ۲$  ، چنین است :

$$t_6 = 4 \times 2^{6-1} = 4 \times 2^5 = ۱۲۸$$

همچنین جمله هفتم يك تصاعد هندسی که جمله اولش ۷۲۹ و قدر نسبتش  $\frac{1}{3}$  باشد ، چنین است :

$$t_7 = 729 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{7-1} = \frac{729}{729} = ۱$$

**دقت کنید!** از روی دستور ۱ می‌توان یکی از چهار مقدار  $a$  ،  $l$  ،  $n$  و  $q$  را ، به شرط داشتن سه مقدار دیگر ، حساب کرد . مثلاً قدر نسبت يك تصاعد هندسی که جمله اول آن  $a$  و جمله آخرش  $l$  و عدد جمله‌هایش  $n$  باشد ، از روی یکی از دو دستور زیر بدست می‌آید :

$$(۱) \quad q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}} \quad ; \quad (۲) \quad q = \pm \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$$

وقتی که  $n-۱$  زوج باشد      وقتی که  $n-۱$  فرد باشد

**توضیح مهم!** هرگاه عدد  $(n-۱)$  زوج و از تصاعد هندسی فقط جمله اول و آخر آن معلوم باشد ، برای  $q$  دوجواب قرینه از دستور شماره ۲ بدست می‌آید .

#### ۱۰- درج چند واسطه هندسی بین دو عدد مفروض - منظور

از درج مثلاً ۵ واسطه هندسی مابین اعداد ۳ و ۱۹۲ آن است که بین ۳ و ۱۹۲ پنج عدد طوری بنویسیم که دسته هفت عدد حاصل تشکیل يك تصاعد هندسی بدهند . بنابراین چون از تصاعد مطلوب جمله اول و جمله آخر و عدد جمله‌ها معلوم است ، داریم :

$$a = ۳ \quad \text{و} \quad l = ۱۹۲ \quad \text{و} \quad n = ۵ + ۲ = ۷$$

$$q = \pm \sqrt[7-1]{\frac{192}{3}} = \pm \sqrt[6]{64} = \pm \sqrt[6]{2^6} = \pm 2$$

پس این دو تصاعد هندسی را خواهیم داشت :

$$\pm 3 : \pm 6 : 12 : \pm 24 : 48 : \pm 96 : 192$$

و پنج واسطه هندسی مطلوب از این قرارند :

$$6, 12, 24, 48, 96$$

$$-6, 12, -24, 48, -96 \quad \text{یا}$$

**نکته مهم !** اگر  $a, b, c$  سه جمله متوالی يك تصاعد هندسی باشند،  $b$  واسطه هندسی است بین  $a$  و  $c$ ؛ زیرا:

$$\frac{c}{b} = q \quad \text{و} \quad \frac{b}{a} = q$$

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$$

$$b^2 = a \cdot c$$

**بر عکس** اگر  $b$  واسطه هندسی بین  $a$  و  $c$  باشد،  $a, b, c$  سه جمله متوالی يك تصاعد هندسی خواهند بود (چرا؟).

**۱۱ - محاسبه مجموع جمل تصاعد هندسی -** اگر مجموع  $n$  جمله تصاعد هندسی:

$$\pm a : b : c : \dots : k : l$$

را  $S$  و قدر نسبت را  $q$  بنامیم، داریم:

$$S = a + b + c + \dots + k + l$$

$$Sq = aq + bq + \dots + kq + lq$$

حال اگر به همین ترتیب که نوشته شده است، تساوی اول را از تساوی دوم کم کنیم، با در نظر گرفتن

$$l = kq \quad \dots \quad c = bq \quad \text{و} \quad b = aq$$

خواهیم داشت :

$$Sq - S = lq - a$$

$$S(q - 1) = lq - a$$

$$q \neq 1 \quad \text{و به فرض:}$$

$$(2) \quad \left| S = \frac{lq - a}{q - 1} \right|$$

(اگر  $q = 1$ ، همه جمله‌ها برابر  $a$  و  $S = na$  خواهد بود).

اگر در دستور ۲ به جای  $l$  مقدارش  $aq^{n-1}$  را بگذاریم، خواهیم داشت :

$$(3) \quad \left| S = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \right|$$

مثلاً اگر در يك تصاعد هندسی جمله اول ۲ و جمله آخر ۱۲۵۰ و

قدرنسبت ۵ باشد، مجموع جمله‌های آن چنین است :

$$(از دستور ۲) \quad S = \frac{1250 \times 5 - 2}{5 - 1} = 1562$$

و اگر جمله اول ۲۵۶ و قدرنسبت  $\frac{1}{4}$  و عدد جمله های يك تصاعد هندسی ۶ باشد ، از روی دستور ۳ داریم :

$$S = 256 \times \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^6 - 1}{\frac{1}{4} - 1} = 256 \times \frac{\frac{4095}{4096} - 1}{\frac{3}{4}} = 341 \frac{1}{25}$$

توجه کنید! اگر این عددها را که به توان رسیده است :

$$2^3 = 8 \quad \left| \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\right.$$

$$2^4 = 16 \quad \left| \quad \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\right.$$

$$2^5 = 32 \quad \left| \quad \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}\right.$$

بدقت ملاحظه کنید ، می فهمید که :

**الف -** هر عدد مثبت بزرگتر از واحد چون به توان عددی بزرگتر از ۱ برسد ؛ بزرگتر می شود .

**ب -** هر عدد مثبت کوچکتر از واحد چون به توان عددی بزرگتر از ۱ برسد ، کوچکتر می شود و هر قدر نمای آن بزرگتر باشد ، حاصل کوچکتر می گردد ؛ بطوری که اگر نمای آن بزرگ شود ، حاصل بی اندازه کوچک و به صفر نزدیک می شود و می توان آن را برابر صفر گرفت .

**۱۲ -** در دستور  $S = a \frac{q^n - 1}{q - 1}$  اگر  $|q| < 1$  و  $n$  عدد جمله های

تصاد هندسی بی اندازه بزرگ شود ، دستور نامبرده به صورت ساده تصاعد هندسی  $S = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$  یا  $S = \frac{a}{1 - q}$  در می آید ( از  $q^n$  که بی اندازه کوچک است صرف نظر شده است ) .

مثلاً مجموع بینهایت تصاعد هندسی :

$$5 : \frac{5}{2} : \frac{5}{4} : \dots$$

$$S = \frac{5}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10$$

چنین می شود :

در این تصاعد ۱۰ را حد مجموع جمل آن می نامند .

**۱۳ - تبدیل کسر اعشاری متناوب به کسر متعارفی - در تبدیل**

کسر متعارفی به کسر اعشاری دو حالت اتفاق می افتد :

**حالت اول -** پس از يك یا چند تقسیم ، به باقیمانده صفر می رسیم .  
مانند  $\frac{2}{5}$  و  $\frac{3}{8}$  که بترتیب برابر  $0/4$  و  $0/375$  است . در این حالت کسر متعارفی مفروض برابر يك کسر اعشاری است که عدد ارقامش محدود است . بعکس کسر اعشاری  $0/375$  به ترتیب زیر به کسر متعارفی تبدیل می شود :

$$0/375 = \frac{375}{1000} = \frac{3}{8}$$

**حالت دوم -** هر چند عمل تقسیم را ادامه دهیم ، به باقیمانده صفر

نمی رسیم ؛ مانند  $\frac{15}{88}$  و  $\frac{2}{3}$  :

	۳		۸۸
۲۵	۰/۶۶۶...	۱۵۰	۰/۱۷۰۴۵۴۵...
۲۵		۶۲۵	
۲۵		۴۰۰	
۲۵		۴۸۰	
۰۰		۴۰۰	
۰۰		۰۰۰	
۰۰		۰۰۰	

اعدادی مانند  $۰/۶۶۶...$  و  $۰/۱۷۰۴۵۴۵...$  را عددهای اعشاری متناوب می نامند .

عدد اعشاری متناوب ، عددی است اعشاری که عدۀ ارقامش نامحدود اما تشکیل شده باشد از چند رقم که به ترتیب معین تکرار شده باشند .

مانند  $۰/۴۷۴۷...$  و  $۰/۱۷۴۵۳۴۵۳۴۵۳...$

که در اولی دو رقم ۴، ۷ و در دومی سه رقم ۴، ۵، ۳ به دنبال هم مرتباً تکرار می شود . ۴۷ را دوره (\*) عدد  $۰/۴۷۴۷...$  و ۴۵۳ را دوره عدد  $۰/۱۷۴۵۳۴۵۳...$  می نامند . هر عدد اعشاری متناوب مانند

$۰/۶۶۶...$  و  $۰/۴۷۴۷...$

که دوره اش بلافاصله پس از ممیز شروع می شود ، کسر یا عدد اعشاری متناوب ساده نامیده می شود و هر عدد اعشاری متناوب مانند  $۰/۱۷۰۴۵۴۵...$  و  $۰/۴۲۷۵۲۷۵...$  را که در آن ، دوره ، بلافاصله پس از ممیز شروع نشود ، کسر (عدد) اعشاری متناوب مرکب می نامند .

در عدد اعشاری متناوب مرکب ارقامی را که بین ممیز و اولین

(\*) کلمۀ دوره را به جای دوره گردش انتخاب کرده ایم .

دوره قرارداد دارد ، ارقام ثابت و عدد حاصل از این ارقام را جزء ثابت (\*) می نامیم . مثلاً ارقام ۱ ، ۷ ، ۵ ، رقمهای ثابت و عدد ۱۷۰ جزء ثابت عدد اعشاری مرکب  $۰/۱۷۰۴۵۴۵$  است .

کسر  $\frac{۱}{۳}$  را که از تقسیم صورت آن بر مخرجش کسر اعشاری متناوب  $۰/۶۶۶...$  بدست می آید کسر مولد این کسر اعشاری متناوب می گویند . همچنین کسر  $\frac{۱۵}{۸۸}$  را کسر مولد عدد اعشاری متناوب مرکب  $۰/۱۷۰۴۵۴۵$  می گویند .

بعکس می توان تحقیق کرد که هر کسر اعشاری متناوب ( که دوره اش ۹ نباشد ) ، از یک کسر متعارفی تولید می شود ؛ یعنی دارای یک کسر مولد است .

مثلاً اگر بخواهیم مولد کسر اعشاری ساده متناوب  $۰/۶۶۶....$  را پیدا کنیم ، می گوئیم که آن کسر برابر مجموع  $۰/۶$  ،  $۰/۰۶$  ،  $۰/۰۰۶$  و .... است . چنانکه می بینیم این اعداد جمله های تصاعد هندسی زیرند :

$$... ۰/۰۰۶ : ۰/۰۶ : ۰/۶ ::$$

که جمله اولش  $۰/۶$  و قدر نسبتش  $\frac{۱}{۱۰}$  است و چون عدۀ جمل تصاعدی اندازه بزرگ است ، مجموع آن برابر :  $S = \frac{۰/۶}{۱ - \frac{۱}{۱۰}} = \frac{۶}{۹}$  است .

همچنین مولد کسر اعشاری متناوب  $۰/۴۵۳۴۵۳...$  مجموع جمل

\* این اصطلاح را به جای دوره غیر گردش که به نظر ما صحیح نیست ، انتخاب کرده ایم .

يك تصاعد هندسی نزولی است که جمله اول آن  $۰/۴۵۳$  و قدر نسبتش  $\frac{1}{۱۰۰۰}$  است .

$$۰/۴۵۳۴۵۳\dots = \frac{۰/۴۵۳}{1 - \frac{1}{۱۰۰۰}} = \frac{۴۵۳}{۹۹۹}$$

از این دو مثال می توان نتیجه گرفت که :

مولد هر کسر اعشاری متناوب ساده (کوچتر از واحد) کسری است که صورتش برابر دوره آن و مخرجش عددی است که تمام رقمهایش ۹ و عدد رقمهایش برابر عدد رقمهای دوره باشد .

مثلاً : کسر مولد  $۰/۶۶۶\dots$  کسر  $\frac{۶}{۹}$  یا  $\frac{۲}{۳}$  است .

کسر مولد  $۰/۴۵۳۴۵۳\dots$  کسر  $\frac{۴۵۳}{۹۹۹}$  یا  $\frac{۱۵۱}{۳۳۳}$  است .

کسر مولد  $۰/۲۷۰۲۷۰\dots$  کسر  $\frac{۲۷۰}{۹۹۹}$  یا  $\frac{۱۰}{۳۷}$  است .

کسر مولد  $۰/۰۸۰۸۰۸\dots$  کسر  $\frac{۸}{۹۹}$  است .

اگر بخواهیم کسر مولد اعشاری متناوب مرکب  $۰/۳۲۷۵۲۷۵\dots$

را پیدا کنیم چنین عمل می کنیم :

$$\begin{aligned} ۰/۳۲۷۵۲۷۵\dots &= \frac{1}{10} (۳/۲۷۵۲۷۵\dots) = \frac{1}{10} (۳ + ۰/۲۷۵۲۷۵\dots) \\ &= \frac{1}{10} \left( ۳ + \frac{۲۷۵}{۹۹۹} \right) = \frac{1}{10} \left( \frac{۳ \times ۹۹۹ + ۲۷۵}{۹۹۹} \right) \\ &= \frac{1}{10} \left[ \frac{۲(۱۰۰۰-۱) + ۲۷۵}{۹۹۹} \right] \\ &= \frac{1}{10} \left( \frac{۳۲۷۵-۳}{۹۹۹} \right) = \left( \frac{۳۲۷۵-۳}{۹۹۹۰} \right) \end{aligned}$$

بنابراین :

کسر مولد هر کسر اعشاری متناوب مرکب (کوچتر از واحد) کسری است متعارفی که صورتش عددی است صحیح برابر با قیماندۀ تفریق جزء ثابت از عددی که تشکیل شده است از جزء ثابت و یک دوره، و مخرجش عددی است صحیح تشکیل شده از چند ۹ و به دنبال آن چند صفر که شماره ۹ها برابر عدد ارقام دوره و شماره صفرها برابر عدد ارقام ثابت باشد .

مثلاً مولد کسر اعشاری متناوب  $۰/۳۲۷۵۲۷۵\dots$  کسر  $\frac{۳۲۷۵-۳}{۹۹۹۰}$

یا  $\frac{۱۶۳۶}{۴۹۹۵}$  است ، و مولد کسر اعشاری متناوب  $۰/۱۷۰۴۵۴۵\dots$  کسر

$\frac{۱۷۰۴۵-۱۷۰}{۹۹۰۰۰}$  یا  $\frac{۱۵}{۸۸}$  است .

### تمرین

شش جمله تصاعدهای هندسی زیر را بنویسید :

(۱)  $a=۳$  و  $q=۲$  (۲)  $a=۳$  و  $q=-\frac{1}{۳}$

(۳)  $a=۳$  و  $q=-۲$  (۴)  $a=۴$  و  $q=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

(۵)  $a=\frac{۲}{۳}$  و  $q=\frac{۳}{۲}$  (۶)  $a=\frac{۷}{۲}$  و  $q=\frac{1}{\sqrt{۳}}$

کدام دسته اعداد زیر تشکیل تصاعد هندسی می دهند و قدر نسبت

آنها چیست ؟

(۷)  $۶، ۱۸، ۵۴$  (۸)  $۶، ۱۲، ۱۸$

(۹)  $\frac{1}{\sqrt{۸}}، \frac{\sqrt{۲}}{۲}، ۲$  (۱۰)  $\sqrt{۲}، ۱، \sqrt{۲}$

(۱۱)  $\frac{۱۲}{x^۲}، ۶، ۲x^۲$  (۱۲)  $۹\sqrt{۳}، ۹، ۲\sqrt{۳}$

$$(۱۳) \quad \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}, 6, -3, \frac{3}{2}$$

(۱۵) باچه شرطی  $a, b, c$  يك تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند ؟

(۱۶) جمله  $(n-1)$ ام يك تصاعد هندسی چقدر است ؟

(۱۷) جمله پنجم تصاعد هندسی  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$  را حساب کنید .

(۱۸) جمله دهم تصاعد هندسی  $1, 2, 4, 8, \dots$  را حساب کنید .

(۱۹) جمله ششم تصاعد هندسی  $10, 5, 2.5, \dots$  را حساب کنید .

(۲۰) تحقیق کنید که اگر در يك تصاعد هندسی هر جمله را از جمله  $n$ ام بعد تفریق کنیم ، باقیمانده‌ها تشکیل يك تصاعد هندسی می‌دهند .

(۲۱) مجموع  $3+6+12+\dots+192$  را حساب کنید .

(۲۲) سومین جمله يك تصاعد هندسی ۹ و پنجمین جمله‌اش ۳۶ است ؛ هشتمین جمله آن را بنویسید .

(۲۳) مجموع  $x+x^2+x^3+\dots+x^n$  را حساب کنید .

(۲۴) مجموع  $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\dots+\frac{1}{x^n}$  را حساب کنید .

(۲۵) مجموع  $a+2a^3+4a^5$  را تا جمله  $n$ ام حساب کنید .

(۲۶) حد مجموع جمله هریک از تصاعدهای زیر را حساب کنید :

$$(۱) \quad 2: \frac{1}{2}: \dots$$

$$(۲) \quad 27: 9: \dots$$

$$(۳) \quad 3: 1: \frac{1}{3}: \dots$$

$$(۴) \quad \sqrt{6}: 1: \dots$$

$$(۵) \quad 1: x: x^2: \dots$$

$$(۶) \quad 1: \frac{-1}{a}: \dots$$

با فرض  $(|x| < 1)$

با فرض  $a > 1$

(۲۷) هریک از کسرهای اعشاری زیر را به کسر متعارفی تبدیل کنید :

$$0.333\dots, 0.6363\dots, 0.53131\dots$$

$$0.175252\dots, 0.24373737\dots, 0.585858\dots$$

(۲۸) ثابت کنید که اگر اضلاع  $a, b, c$  و ارتفاع  $h_a$  از يك مثلث

بترتیب جمله متوالیه يك تصاعد هندسی باشند ، آن مثلث قائم‌الزاویه است . با فرض معلوم بودن  $a$  اضلاع مثلث را تعیین کنید .

(۲۹) اگر  $a, b, c$  جمله متوالیه يك تصاعد هندسی باشند ، ثابت کنید

$$ax^2+2bx+c=0 \text{ دارای يك ریشه مضاعف است .}$$

(۳۰) اگر  $x, y, z$  جمله متوالی يك تصاعد هندسی باشند ، ثابت کنید

$$(x+y+z)(x-y+z)=x^2+y^2+z^2$$

(۳۱) مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع  $a$  مفروض است . چون اواسط اضلاع

را به یکدیگر وصل کنیم ، مثلث متساوی‌الاضلاع دیگری تشکیل می‌شود . حال

اگر اواسط اضلاع این مثلث را نیز به یکدیگر وصل کنیم و این عمل را

بینهایت مرتبه ادامه دهیم : اولاً - حد مجموع محیطهای مثلثهای حاصل را

تعیین کنید . ثانیاً - حد مجموع مساحتهای این مثلثها را تعیین کنید .

(۳۲) دایره‌ای به مرکز  $O$  و قطر  $AB=2R$  مفروض است ؛ به قطر

$OA$  دایره‌ای رسم می‌کنیم ؛ شعاع دایره دوم را نیز قطر قرار داده دایره‌ای

به همین طریق رسم می‌کنیم و این عمل را ادامه می‌دهیم ؛ مطلوب است حد

مجموع محیط و مجموع مساحتهای این دایره .

(۳۳) يك مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $a$  مفروض است ؛ در دایره

محاطی داخلی این مثلث نیز مثلثی متساوی‌الاضلاع محاط می‌کنیم و در دایره

محاطی داخلی این مثلث نیز مثلثی متساوی‌الاضلاع محاط می‌کنیم ؛ به همین

طریق عمل را ادامه می‌دهیم ؛ مطلوب است حد مجموع مساحتهای دایره

محاطی مثلثها .



(۳۴) مثلث قائم الزاویه‌ای به وتر  $a$  و به اضلاع  $b$  و  $c$  مفروض است. از رأس قائمه عمودی بر وتر فرود می‌آوریم و از موقع آن، عمود دیگری بر ضلع  $b$  رسم می‌کنیم و از موقع این عمود، عمود دیگری بر وتر فرود می‌آوریم و این عمل را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم؛ مطلوب است: اولاً - محاسبه طول هر يك از عمودها بر حسب  $a$ ،  $b$  و  $c$ . ثانیاً - محاسبه حدهمجموع طول این عمودها.

(۳۵) دایره‌ای به شعاع  $R$  مفروض است؛ محیط آن را به هشت قسمت متساوی تقسیم می‌کنیم؛ از مرکز به نقاط تقسیم  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و .... وصل می‌کنیم اگر از نقطه  $A$  عمودی بر  $OB$  و از موقع این عمود، عمود دیگری بر شعاع  $OC$  رسم کنیم و این عمل را تا شعاع آخر ادامه دهیم؛ اولاً - مطلوب است طول این عمودها. ثانیاً - اگر این عمل را به همین طریق ادامه دهیم، مطلوب است حد مجموع طول این عمودها.

(۳۶) احمد و علی با هم قرار گذاشتند که احمد روز اول بهمن ماه ده تومان به علی بدهد، روز دوم ۲۰ تومان، روز سوم ۳۰ تومان؛ به همین ترتیب تا روز پانزدهم بهمن ماه؛ و علی روز شانزدهم یک ریال، روز هفدهم دو ریال، روز هجدهم چهار ریال، روز نوزدهم هشت ریال و به همین ترتیب تا روز سیام بهمن ماه به احمد بدهد؛ این قرار به نفع کدام یکی است؟

\* \* \*

### خلاصه مطالب مهم:

۱- هرگاه چند عدد به دنبال هم چنان نوشته شده باشند که هر يك از آنها مساوی با مجموع عدد پیش از خود و يك عدد ثابت باشد، این چند عدد تشکیل تصاعد عددی یا تصاعد حسابی می‌دهند.

۲- دريك تصاعد حسابی جمله اول را  $a$  و قدرنسبت را  $d$ ، عده جمل را  $n$ ، جمله  $n$ ام را  $l$  و مجموع  $n$  جمله اول را  $S$  می‌نامیم.

۳- دريك تصاعد حسابی جمله  $n$ ام چنین است:

$$l = a + (n - 1)d$$

۴- در هر تصاعد حسابی محدود، حاصل جمع هر دو جمله متساوی البعد از طرفین، مساوی مجموع دو جمله اول و آخر است.

۵- دريك تصاعد حسابی محدود، دستور مجموع  $n$  جمله اول آن چنین است:

$$S = \frac{n}{2}(a + l)$$

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] \quad \text{یا}$$

۶- هرگاه چند عدد مخالف صفر به دنبال هم چنان نوشته شده باشند که هر يك از آنها برابر حاصل ضرب عدد پیش از خودش دريك عدد ثابت باشد، این چند عدد تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند.

۷- دريك تصاعد هندسی، جمله اول را  $a$ ، قدرنسبت را  $q$ ، عده جمل را  $n$ ، جمله  $n$ ام را  $l$  و مجموع  $n$  جمله اول را  $S$  می‌نامیم.

۸- دريك تصاعد هندسی  $l$ ، جمله  $n$ ام آن، چنین بدست می‌آید:

$$l = a \cdot q^{n-1}$$

۹- واسطه هندسی هر دو عدد با آن دو عدد تشکیل يك تصاعد هندسی می‌دهد و بعکس.

۱۰- حاصل جمع  $n$  جمله اول تصاعد هندسی که قدرنسبت آن مثبت باشد، برطبق این دستور بدست می‌آید:

$$S = \frac{lq - a}{q - 1}$$

$$S = a \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

۱۱- اگر در يك تصاعد هندسی قدر مطلق  $q$  (قدر نسبت) کوچکتر از واحد و  $n$  عدد جمل ، بی اندازه بزرگ گرفته شود ، مجموع جمل دارای حدی است برابر :

$$S = \frac{a}{1 - q}$$

۱۲- عدد اعشاری متناوب ، عددی است اعشاری که عدد ارقامش نامحدود باشد ، اما تشکیل شده باشد از چند رقم که به ترتیب معین تکرار شده باشند . هر عدد اعشاری که دوره اش بلافاصله پس از ممیز شروع شود ، اعشاری متناوب ساده نامیده می شود و اگر دوره اش بلافاصله پس از ممیز شروع نشود ، آن را عدد اعشاری متناوب مرکب می نامند .

۱۳- مولد هر عدد اعشاری متناوب (کوچکتر از واحد) ، کسری است متعارفی که صورتش برابر دوره آن و مخرجش عددی که تمام رقمهای ۹ و شماره رقمهای برابر عدد رقمهای دوره باشد .

۱۴- مولد هر عدد اعشاری متناوب مرکب (کوچکتر از واحد) ، کسری است متعارفی که صورتش عددی است صحیح که برابر باقیمانده تفریق جزء ثابت ، از عددی که تشکیل شده باشد از جزء ثابت و يك دوره ، و مخرجش عددی است صحیح که تشکیل شده باشد از چند ۹ و به دنبال آن چند صفر که عدد ۹ها برابر عدد ارقام دوره و عدد صفرها برابر عدد ارقام ثابت باشد .

خود را امتحان کنید :

- ۱- تصاعد حسابی را تعریف کنید . قدر نسبت در تصاعد حسابی چیست ؟
- ۲- آیا در تصاعد حسابی ممکن است که قدر نسبت عدد منفی باشد ؟
- ۳- اگر اعداد  $a, b, c, d, e$  جمل متوالی تصاعد حسابی باشند ، آیا اعداد  $a, b, c, d, e$  نیز جمل يك تصاعد حسابی خواهند بود ؟ قدر نسبت های این دو تصاعد نسبت به هم چگونه اند ؟
- ۴- آیا اعداد زوج متوالی تشکیل تصاعد حسابی می دهند ؟ قدر نسبت این تصاعد چه عددی است ؟
- ۵- تصاعد هندسی چیست ، جمله  $n$  ام آن از کدام دستور بدست می آید ؟
- ۶- اگر اعداد  $G, M, N, P$  جمل متوالی يك تصاعد هندسی باشند ، آیا اعداد  $P, N, M, G$  جمل متوالی يك تصاعد هندسی خواهند بود ؟ قدر نسبت های این دو تصاعد نسبت به هم چگونه اند ؟
- ۷- در چه صورت می توانیم مجموع بینهایت جمله يك تصاعد هندسی را حساب کنیم ؟ دستور آن کدام است ؟
- ۸- کسر اعشاری متناوب یعنی چه ؟ اعداد اعشاری متناوب مرکب کدامند ؟
- ۹- کسر مولد عدد اعشاری ساده یا مرکب کدام است ؟ چگونه آن را بدست می آورند ؟
- ۱۰- چند عدد مساوی تشکیل چه نوع تصاعدی می دهند ؟ قدر نسبت آن تصاعد چیست ؟
- ۱۱- اعدادی که قدر مطلق آنها با هم برابر و علامتهایشان يك در میان + و - باشند ، چگونه تصاعدی تشکیل می دهند ؟ قدر نسبت آن چیست ؟

## فصل سوم

### ربیع مرکب = قسط السنین

#### الف - ربیع مرکب

**تعریف -** در مراحه ، هرگاه سود را در آخر سال یا در آخر هرشش ماه (یا در آخر هر زمان ثابت معین) بر سرمایه بیفزایند و مجموع اصل و فرع را سرمایه ای برای سال بعد یا برای شش ماه بعد (یا زمان ثابت بعد) قرار دهند ، می گوئیم که سرمایه مذکور به **ربیع مرکب** گذاشته شده است.

**مسئله -** به فرض آنکه سرمایه  $a$  ریال از قرار نرخ  $i\%$  به مراحه مرکب گذاشته شده ، مطلوب است تعیین اصل و فرع پس از  $n$  سال :

بنابه فرض سود ۱۰۰ ریال در یک سال  $i$  ریال است ؛ پس سود یک ریال در یک سال  $\frac{i}{100}$  ریال خواهد بود که آن را به  $r$  نمایش می دهیم ؛ از این رو سود  $a$  ریال در یک سال برابر  $ar$  ریال و اصل و فرع آن پس از مدت یک سال  $a+ar$  ریال یا  $a(1+r)$  ریال می شود ؛ یعنی اصل و فرع هر سرمایه پس از مدت یک سال مساوی حاصل ضرب آن سرمایه در  $(1+r)$  است ؛ بنابراین اصل و فرع سرمایه  $a$  ریال یعنی  $a(1+r)$  ریال (که سرمایه جدیدی برای سال دوم محسوب می شود) ،

بعد از انقضای سال دوم  $a(1+r)(1+r)$  یا  $a(1+r)^2$  ریال خواهد بود که سرمایه جدیدی برای سال سوم است ؛ اصل و فرع آن بعد از یک سال (انتهای سال سوم) ،  $a(1+r)^3$  ریال و بالاخره اصل و فرع سرمایه  $a$  ریال پس از مدت  $n$  سال برابر است با  $a(1+r)^n$  ریال . اگر اصل و فرع را پس از  $n$  سال با  $A$  نمایش دهیم ، دستور زیر بدست می آید :

$$(۱) \quad A = a(1+r)^n$$

**مثال -** صندوق پس انداز ملی برای اندوخته های کمتر از ۵۰۰۰ ریال ۴٪ سود می دهد و این سود را در آخر اسفند هر سال بر اندوخته پیش می افزاید . اگر در روز اول فروردین ۱۳۴۰ دوهزار ریال به این صندوق سپرده باشیم ، در آخر سال ۱۳۴۵ چه اندوخته ای خواهیم داشت ؟ در این مسئله  $a=2000$  ،  $r=0.04$  ،  $n=6$  و  $A$  مجهول است .

برای بدست آوردن  $A$  از روی دستور (شماره ۱) چنین عمل می کنیم :

$$\begin{aligned} A &= a(1+r)^n = 2000 \times (1.04)^6 \\ \log A &= \log 2000 + 6 \log 1.04 \\ &= 3.3010 + 6 \times 0.0170 = 3.4030 \end{aligned}$$

عدد مابازای  $3.4030$  می شود :

$$A = 2529 \text{ ریال}$$

**دقت کنید !** دستور ۱ مربوط است به مراحه ای که در آن سود

را در آخر هر سال به سرمایه بیفزایند .

اما اگر در یک مراحه سود را در آخر هرشش ماه به سرمایه

بیفزایند ، با استدلالی کاملاً شبیه به استدلالی که برای یافتن دستور (۱)

بکار بردیم خواهیم دید که می توان عیناً در آن مورد نیز دستور ۱ را بکار برد به شرط آنکه  $n$  را عدد «۶ ماه» ها و  $r$  را برابر سود يك ريال در شش ماه یعنی  $\frac{1}{400}$  گرفت .

**باز هم دقت کنید!** در حالتی که سود را در آخر هر سال به سرمایه بیفزایند ، اگر مدت مراحه مرکب شامل کسری از سال نیز باشد ، مثلاً ۶ سال و ۷ ماه ، عمل درست آن است که ابتدا اصل و فرع سرمایه  $a$  را در مدت ۶ سال حساب کنیم و بعد سود این اصل و فرع را (به مراحه ساده) در مدت ۷ ماه ، بر آن بیفزاییم . پس اگر بطور کلی مدت  $n$  سال و  $m$  ماه باشد ، اصل و فرع پس از  $n$  سال عبارت است از  $a(1+r)^n$  ريال که سود  $a(1+r)^n$  ريال در  $m$  ماه ( $\frac{m}{12}$  سال) می شود :

$$a(1+r)^n \times r \times \frac{m}{12}$$

و مجموع اصل و فرع پس از  $n$  سال و  $m$  ماه می شود :

$$A = a(1+r)^n \left( 1 + \frac{m}{12} r \right)$$

محاسبه اصل و فرع در حالتی که سود در آخر هر ۶ ماه به سرمایه افزوده شود و مدت شامل کسری از ۶ ماه باشد ، مانند حالت فوق است . اما در بانکها به این طریق حساب نمی کنند و برای سهولت مثلاً اگر مدت ۶ سال و هفت ماه باشد ،  $n$  را برابر  $\frac{7}{12}$  یعنی  $\frac{79}{12}$  می گیرند ؛ یعنی خواه  $n$  درست باشد و خواه کسری ، همان دستور ۱ را بکار می برند .

۳ - از روی دستور ۱ می توان یکی از چهار مقدار  $r, n, A, a$  را با معلوم بودن سه تای آنها حساب کرد . برای این کار ، از طرفین دستور (۱) لگاریتم می گیریم و آن را چنین می نویسیم :

$$\log A = \log a + n \cdot \log(1+r) \quad (2)$$

**مثال ۱ -** سود و سرمایه ۳۰۰۰۰ ريال پس از چه مدت از قرار ۵٪ به ربح مرکب برابر ۵۰۰۰ ريال می شود ؟

$$n = \frac{\log A + \text{colog } a}{\log(1+r)} \quad \text{از روی دستور (۲) داریم :}$$

پس در این مسئله :

$$n = \frac{\log 5000 + \text{colog } 3000}{\log 1.05} = \frac{0.6990}{0.0212} = 32.97 \quad \text{سال}$$

روز ماه سال

۱۸ ۵ ۱۰

و از آنجا :

**مثال ۲ -** با چه نرخ باید ۱۵۰۰۰ ريال را در مدت ۵ سال به مراحه مرکب گذاشت تا اصل و فرع آن ۲۵۰۰۰ ريال شود ؟ از روی دستور (۲) داریم :

$$\log(1+r) = \frac{1}{n} (\log A + \text{colog } a)$$

از روی این رابطه ابتدا  $\log(1+r)$  ، بعد  $1+r$  و سپس  $i$  (نرخ) را چنین بدست می آوریم :

$$\log(1+r) = \frac{1}{5} (\log 25000 + \text{colog } 15000) = 0.0444$$

$$1+r = 1.08$$

$$r = 0.08$$

$$i = 8\%$$

بکار بردیم خواهیم دید که می توان عیناً در آن مورد نیز دستور ۱ را بکار برد به شرط آنکه  $n$  را عدد «۶ ماه»ها و  $r$  را برابر سود يك ريال در شش ماه یعنی  $\frac{i}{200}$  گرفت .

**باز هم دقت کنید!** در حالتی که سود را در آخر هر سال به سرمایه بیفزایند ، اگر مدت مراحه مرکب شامل کسری از سال نیز باشد ، مثلاً ۶ سال و ۷ ماه ، عمل درست آن است که ابتدا اصل و فرع سرمایه  $a$  را در مدت ۶ سال حساب کنیم و بعد سود این اصل و فرع را (به مراحه ساده) در مدت ۷ ماه ، بر آن بیفزاییم . پس اگر بطور کلی مدت  $n$  سال و  $m$  ماه باشد ، اصل و فرع پس از  $n$  سال عبارت است از  $a(1+r)^n$  ريال که سود  $a(1+r)^n$  ريال در  $m$  ماه ( $\frac{m}{12}$  سال) می شود :

$$a(1+r)^n \times r \times \frac{m}{12}$$

و مجموع اصل و فرع پس از  $n$  سال و  $m$  ماه می شود :

$$A = a(1+r)^n \left(1 + \frac{m}{12} \cdot r\right)$$

محاسبه اصل و فرع در حالتی که سود در آخر هر ۶ ماه به سرمایه افزوده شود و مدت شامل کسری از ۶ ماه باشد ، مانند حالت فوق است . اما در بانکها به این طریق حساب نمی کنند و برای سهولت مثلاً اگر مدت ۶ سال و هفت ماه باشد ،  $n$  را برابر  $6\frac{7}{12}$  یعنی  $\frac{79}{12}$  می گیرند ؛ یعنی خواه  $n$  درست باشد و خواه کسری ، همان دستور ۱ را بکار می برند .

۳ - از روی دستور ۱ می توان یکی از چهار مقدار  $r, n, A, a$  را با معلوم بودن سه تای آنها حساب کرد . برای این کار ، از طرفین دستور (۱) لگاریتم می گیریم و آن را چنین می نویسیم :

$$(2) \quad \log A = \log a + n \cdot \log(1+r)$$

**مثال ۱ -** سود و سرمایه ۳۰۰۰ ريال پس از چه مدت از قرار ۵٪ به ربح مرکب برابر ۵۰۰۰ ريال می شود ؟

$$n = \frac{\log A + \text{colog } a}{\log(1+r)} \quad \text{از روی دستور (۲) داریم :}$$

پس در این مسئله :

$$n = \frac{\log 5000 + \text{colog } 3000}{\log 1.05} = \frac{0.7013}{0.0212} = 33.1$$

سال                      ماه                      روز

$$n = 10 \quad 5 \quad 18$$

و از آنجا :

**مثال ۲ -** با چه نرخ باید ۱۵۰۰۰ ريال را در مدت ۵ سال به مراحه مرکب گذاشت تا اصل و فرع آن ۲۵۰۰۰ ريال شود ؟ از روی دستور (۲) داریم :

$$\log(1+r) = \frac{1}{n}(\log A + \text{colog } a)$$

از روی این رابطه ابتدا  $\log(1+r)$  ، بعد  $1+r$  و سپس  $i$  (نرخ) را چنین بدست می آوریم :

$$\log(1+r) = \frac{1}{5}(\log 25000 + \text{colog } 15000) = 0.0444$$

$$1+r = 1.058$$

$$r = 0.058$$

$$i = 5.8\%$$

### ب - قسط السنین

۴- تعریف - قسط السنین مبلغی است ثابت که در هر سال یک بار یا هر شش ماه یا هر یک ماه یک بار تا مدتی معین به یک مرکب می پردازند و این عمل را برای تشکیل سرمایه یا برای استهلاک دین انجام می دهند (واضح است که برای تشکیل سرمایه در ابتدای هر سال این مبلغ ثابت پرداخت می شود و برای استهلاک دین آخر هر سال).

### اولاً - قسط السنین برای تشکیل سرمایه

۵- مسئله - شخصی در ابتدای هر سال مبلغی ثابت را (a ریال) از قرار  $i\%$  به مرابحه مرکب می گذارد؛ معین کنید در آخر سال n ام از اصل و فرع آن چه سرمایه (C) ای برای او تشکیل می شود؟

حل - اصل و فرع اقساط a ریال در مدتی که هر یک از این اقساط به مرابحه مرکب می ماند، از این قرار است:

اصل و فرع قسط اول در آخر سال n ام (یعنی پس از n سال)

$$a(1+r)^n$$

اصل و فرع قسط دوم تا آخر سال n-۱ ام (یعنی پس از n-۱ سال)

$$a(1+r)^{n-1}$$

.....  
.....

اصل و فرع قسط n ام در آخر سال n ام (یعنی پس از n سال)

$$a(1+r)$$

C مجموع همه این اصل و فرعها، سرمایه ای است که پس از

نما	۱/۰۳	۱/۰۴	۱/۰۴۵	۱/۰۵	۱/۰۶
۱	۱/۰۳	۱/۰۴	۱/۰۴۵	۱/۰۵	۱/۰۶
۲	۱/۰۶۰۹۰۰	۱/۰۸۱۶۰۰	۱/۰۹۲۰۲۵	۱/۱۰۲۵۰۰	۱/۱۲۳۶۰۰
۳	۱/۰۹۲۷۲۷	۱/۱۲۴۷۶۴	۱/۱۴۱۱۶۶	۱/۱۵۷۶۲۵	۱/۱۹۱۰۱۶
۴	۱/۱۲۵۵۰۹	۱/۱۶۹۸۵۹	۱/۱۹۲۵۱۹	۱/۲۱۵۵۰۶	۱/۲۶۲۴۷۷
۵	۱/۱۵۹۲۷۴	۱/۲۱۶۶۵۳	۱/۲۴۶۱۸۲	۱/۲۷۶۲۸۲	۱/۳۳۸۲۲۶
۶	۱/۱۹۴۰۵۲	۱/۲۶۵۳۱۹	۱/۳۰۲۲۶۰	۱/۳۴۰۰۹۶	۱/۴۱۸۵۱۹
۷	۱/۲۲۹۸۷۴	۱/۳۱۵۹۳۲	۱/۳۶۰۸۶۲	۱/۴۰۷۱۰۰	۱/۵۰۳۶۳۰
۸	۱/۲۶۶۷۷۰	۱/۳۶۸۵۶۹	۱/۴۲۱۰۰۱	۱/۴۷۷۴۴۵	۱/۵۹۳۸۴۸
۹	۱/۳۰۴۷۷۳	۱/۴۲۳۳۱۲	۱/۴۸۶۰۹۵	۱/۵۵۱۳۲۸	۱/۶۸۹۴۷۹
۱۰	۱/۳۴۳۹۱۶	۱/۴۸۰۲۴۴	۱/۵۵۲۹۶۹	۱/۶۲۸۸۹۵	۱/۷۹۰۸۴۸
۱۱	۱/۳۸۴۲۳۴	۱/۵۳۹۴۵۴	۱/۶۲۲۸۵۳	۱/۷۱۰۳۳۹	۱/۸۹۸۲۹۹
۱۲	۱/۴۲۵۷۶۱	۱/۶۰۱۰۳۲	۱/۶۹۵۸۸۱	۱/۷۹۵۸۵۶	۲/۰۱۲۱۹۶
۱۳	۱/۴۶۸۵۳۴	۱/۶۶۵۰۷۴	۱/۷۷۲۱۹۶	۱/۸۸۵۶۴۹	۲/۱۳۲۹۸۸
۱۴	۱/۵۱۲۵۹۰	۱/۷۳۱۶۷۶	۱/۸۵۱۹۴۵	۱/۹۷۹۹۳۲	۲/۲۶۰۲۰۴
۱۵	۱/۵۵۷۹۶۷	۱/۸۰۰۹۴۴	۱/۹۳۵۲۸۲	۲/۰۷۸۹۲۸	۲/۳۹۶۵۵۸
۱۶	۱/۶۰۴۷۰	۱/۸۷۲۹۸۱	۲/۰۲۲۳۷۰	۲/۱۸۲۸۷۵	۲/۵۴۰۳۵۲
۱۷	۱/۶۵۲۸۴۸	۱/۹۴۷۹۰۰	۲/۱۱۳۳۷۷	۲/۲۹۲۰۱۸	۲/۶۹۲۷۷۳
۱۸	۱/۷۰۲۴۳۳	۲/۰۲۵۸۱۸	۲/۲۰۸۴۷۹	۲/۴۰۶۶۱۹	۲/۸۵۴۳۳۹
۱۹	۱/۷۵۳۵۰۶	۲/۱۰۶۸۴۹	۲/۳۰۷۸۶۰	۲/۵۲۶۹۵۰	۳/۰۲۵۶۰۰
۲۰	۱/۸۰۶۱۱۱	۲/۱۹۱۱۲۳	۲/۴۱۱۷۱۴	۲/۶۵۳۲۹۸	۳/۲۰۷۱۳۵
۲۱	۱/۸۶۰۲۹۵	۲/۲۷۸۷۶۸	۲/۵۲۰۲۴۱	۲/۷۸۵۹۶۳	۳/۳۹۹۵۶۴
۲۲	۱/۹۱۶۱۰۳	۲/۳۶۹۹۱۹	۲/۶۳۳۶۵۲	۲/۹۲۵۲۶۱	۳/۶۰۳۵۳۷
۲۳	۱/۹۷۳۵۸۷	۲/۴۶۴۷۱۶	۲/۷۵۲۱۶۶	۳/۰۷۱۵۲۴	۳/۸۱۹۷۵۰
۲۴	۲/۰۳۲۷۹۴	۲/۵۶۳۳۰۴	۲/۸۷۶۰۱۴	۳/۲۲۵۱۰۰	۴/۰۴۸۹۳۵
۲۵	۲/۰۹۳۷۷۸	۲/۶۶۵۸۳۶	۳/۰۰۵۴۳۴	۳/۳۸۶۳۵۵	۴/۲۹۱۸۷۱
۳۰	۲/۴۲۷۲۶۲	۳/۲۴۳۳۹۸	۳/۷۴۵۳۱۸	۴/۳۲۱۹۴۲	۵/۷۴۳۴۹۱
۳۵	۲/۸۱۳۸۶۲	۳/۹۴۶۰۸۹	۴/۶۶۷۳۴۸	۵/۵۱۶۰۱۵	۷/۶۸۶۰۸۷
۴۰	۳/۲۶۲۰۳۸	۴/۸۰۱۰۲۱	۵/۸۱۶۳۶۵	۷/۰۳۹۹۸۹	۱۰/۲۸۵۷۱۸
۴۵	۳/۷۸۱۵۹۶	۵/۸۴۱۱۷۶	۷/۲۴۸۲۴۸	۸/۹۸۵۰۰۸	۱۳/۷۶۴۶۱۱
۵۰	۴/۳۸۳۹۰۶	۷/۱۰۶۶۸۳	۹/۰۳۲۶۳۶	۱۱/۴۶۷۴۰۰	۱۸/۴۲۰۱۵۴

$n$  سال برای آن شخص فراهم می‌گردد :

$$C = a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + \dots + a(1+r)$$

می‌بینیم  $C$  مجموع  $n$  جمله یک تصاعد هندسی است که جمله اولش  $a(1+r)$  و قدر نسبت آن  $(1+r)$  باشد ؛ پس :

$$(۱) \quad C = a(1+r) \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

**توجه کنید!** برای محاسبه  $C$  یا  $a$  یا  $n$  به کمک لگاریتم ، ابتدا

باید مقدار  $(1+r)^n - 1$  را حساب کرد .

**مثال ۱-** شخصی در ابتدای هر سال مبلغ ۵۰۰ ریال را از قرار نرخ ۳٪ به مرابحه مرکب می‌گذارد ؛ می‌خواهیم سرمایه او را پس از انقضای ۲۵ سال حساب کنیم .

در اینجا  $a=500$  ،  $r=\frac{3}{100}$  ،  $n=25$  و  $C$  مجهول است .

ابتدا عبارت  $(1+\frac{3}{100})^{25} - 1$  را به ترتیب زیر حساب می‌کنیم :

$$\log(1+\frac{3}{100})^{25} = 25 \log 1.03 = 25(0.0128) = 0.3200$$

$$(1+\frac{3}{100})^{25} = 1.09$$

بنابراین :

$$(1+\frac{3}{100})^{25} - 1 = 0.09$$

پس :

حالا اگر از طرفین دستور (۱) لگاریتم بگیریم ، خواهیم داشت :

$$\log C = \log 500 + \log 1.03 + \log 1.09 + \log 0.03$$

$$\log C = 2.6990 + 0.0128 + 0.0374 + 1.5229$$

$$\log C = 4.2721$$

$$C = 18710$$

جواب

**مثال ۲-** شخصی که ۲۱ سال دارد ، می‌خواهد با پرداخت اقساط سالانه ، در موقع رسیدن به سن ۶۰ سالگی ، صاحب سرمایه‌ای برابر ۳۰۰۰۰۰ ریال شود ؛ اگر نرخ مرابحه ۳/۵٪ باشد ، هر سال چه مبلغی باید بپردازد ؟

در این مثال :  $n=60-21=39$  ،  $r=0.035$  ،  $C=300000$  ،

و  $a$  مجهول است .

ابتدا عبارت  $(1+\frac{3}{100})^{39} - 1$  را حساب می‌کنیم که می‌شود  $2.825$  ، بنابراین :

$$\log a = \log 300000 + \log 0.035 + \log 1.035 + \log 2.825$$

که پس از محاسبه ، مقدار  $a$  چنین می‌شود :

$$a = 359$$

ثانیاً = قسط السنین برای استهلاك دين

**۶- مسئله -** شخصی امروز  $A$  ریال قرض می‌کند ؛ در آخر هر سال چه مبلغی باید بپردازد تا در انقضای  $n$  سال قرضش مستهلك شود به فرض آنکه اقساط و مبلغ  $A$  همه به يك نرخ به مرابحه مرکب داده شده باشند ؟

**حل-** اگر قسط سالانه را  $a$  ریال بگیریم ، اصل و فرع هر يك از اقساط سالانه بترتیب چنین می‌شوند :

اصل و فرع اولین قسط  $a$  که در آخر سال اول پرداخت می‌شود :

$$a(1+r)^{n-1} \quad (\text{در } n-1 \text{ سال})$$

اصل و فرع دومین قسط  $a$  که در آخر سال دوم پرداخت می‌شود :

$$a(1+r)^{n-2} \quad (\text{در } n-2 \text{ سال})$$



اصل و فرع سومین قسط  $a$  که در آخر سال سوم پرداخت می‌شود:

$$a(1+r)^{n-3} \quad (\text{در } n-3 \text{ سال})$$

اصل و فرع  $n$  امین قسط  $a$  که در آخر سال  $n$  ام پرداخت می‌شود:

$$a(1+r)^{n-n} = a \quad (\text{در } n-n \text{ سال})$$

مجموع این مقادیر، یعنی:

$$a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \dots + a = a \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

باید برابر قرض شخص پس از مدت  $n$  سال یعنی مساوی  $A(1+r)^n$  باشد؛ پس:

$$A(1+r)^n = a \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$(۱) \quad a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

**دقت کنید!** برای محاسبه  $A$ ، یا  $a$ ، ابتدا  $(1+r)^n$  را به وسیله لگاریتم و از آنجا  $(1+r)^n - 1$  را حساب می‌کنیم. برای محاسبه  $n$  از روی دستور (۱) ابتدا مقدار  $(1+r)^n$  را حساب می‌کنیم و سپس  $n$  را به کمک لگاریتم بدست می‌آوریم.

**مثال -** شرکتی مبلغ ۱۸۰۰۰۰۰۰ ریال از قرار ۴٪ به ربح مرکب قرض نموده است؛ چه قسطی هر سال باید بپردازد تا پس از ۳۰ سال قرضش مستهلك شود؟

در اینجا  $A = ۱۸۰۰۰۰۰۰$ ،  $r = ۰/۰۴$ ،  $n = ۳۰$  و مجهول است. ابتدا  $۱ - (۱/۰۴)^{۳۰}$  را حساب می‌کنیم که می‌شود  $۲/۲۴۳$  و به کمک لگاریتم از دستور (۱) خواهیم داشت:

$$\log a = \log ۱۸۰۰۰۰ + ۳۰ \log ۱/۰۴ + \log ۲/۲۴۳$$

$$a = ۱۰۴۰۸۸ \quad \text{می‌شود:}$$

### تمرین

۱-۶۹ - ۲۲۰۰۰ ریال از قرار ۴٪ به مدت ۵ سال به ربح مرکب داده شده است. اصل و فرع آن را حساب کنید.

۲-۶۹ - چه سرمایه‌ای از قرار نرخ ۵٪ بعد از ده سال اصل و فرعش به ربح مرکب ۱۲۰۰۰۰ ریال خواهد شد؟

۳-۶۹ - به چه نرخ ۱۰۰۰ ریال پس از ده سال به ربح مرکب ۲۰۰۰ ریال می‌شود؟

۴-۶۹ - چه سرمایه‌ای در مدت ۲۰ سال از قرار نرخ ۵٪ به ربح مرکب ۲۰۰۰۰ ریال می‌شود؟

۵-۶۸ - در چه مدت یک سرمایه‌را که با نرخ ۴٪ به مرابحه مرکب گذاشته‌ایم، دو برابر می‌شود؟

۶-۶۸ - مطلوب است محاسبه اصل و فرع مبلغ ۱۵۰۰۰ ریال از قرار ۱۵٪ به ربح مرکب پس از مدت ۱۲ سال پس از تعیین اصل و فرع، برای امتحان درستی عمل، سرمایه و مدت و نرخ را یکی پس از دیگری مجهول اختیار کنید و مسئله را حل کنید.

۷-۶۸ - مبلغ ۳۵۵۰۰ ریال از قرار نرخ ۶٪ ده سال به مرابحه مرکب گذارده شده است؛ معلوم کنید همان سرمایه با همان نرخ چند سال باید به مرابحه ساده گذاشته شود تا همان اصل و فرع عاید شود.

۸-۶۸ - پس از چه مدتی سرمایه  $a$  از قرار  $i$ ٪ اصل و فرعش  $a \cdot n$  می‌شود؟

۹-۶۸ - در چه مدتی سرمایه‌ای از قرار ۵٪ به ربح مرکب گذاشته شود تا نفعش برابر نصف سرمایه شود؟

نرخ ۱۰٪ - چه سرمایه‌ای است که پس از مدت ۱۸ سال از قرار نرخ ۴٪ اصل و فرعش ۲۰۰۰۰ ریال می‌شود؟ در صورتی که واحد زمان ۶ ماه باشد.

۱۱ - شخصی مبلغ ۵۲۷۲۵ ریال به ربح مرکب می‌گذارد؛ اگر مدت مرابحه دو سال کمتر باشد، اصل و فرع مبلغ مزبور ۴۴۲۲/۱۵ ریال کم می‌شود و اگر مدت دو سال بیشتر باشد، بر اصل و فرع ۴۷۸۳ ریال اضافه می‌شود؛ مطلوب است نرخ و مدت مرابحه.

نرخ ۱۲٪ - اگر شخصی ده سال مقوالی در اول هر سال ۲۵۰۰ ریال از قرار ۵٪ به ربح مرکب بدهد و از اول سال یازدهم تا ۴ سال، سالی ۵۰۰۰ ریال پس بگیرد، چه مبلغ طلبکار خواهد بود؟ (یک سال پس از دریافت آخرین قسط)

۱۳ - بازرگانی ۶۷۲۸۰ ریال در اول فروردین ۱۳۴۱ وام گرفته و با دو قسط ۳۹۸۹۶ ریال یکی در اول فروردین ۱۳۴۲ و دیگری در اول فروردین ۱۳۴۳، آن را می‌پردازد؛ حساب کنید نرخ وام را.

۱۴ - ۸۰۰۰۰ ریال را برای مدتی به ربح مرکب داده‌ایم؛ اگر یک سال زودتر از سر رسید بخواهیم بگیریم، ۴۴۱۰ ریال کمتر بدست خواهد آمد ولی اگر یک سال بیشتر در مرابحه بماند، ۴۶۳۰/۵ ریال بیشتر خواهیم گرفت؛ حساب کنید نرخ و مدت را؟

۱۵ - دو نفر با هم ۶۰۰۰۰ ریال را به یک نرخ به ربح مرکب داده‌اند؛ بعد از دو سال اولی ۴۳۲۶۴ ریال و دومی ۲۱۶۳۲ ریال گرفت؛ نرخ مرابحه و سرمایه هر یک را معین کنید.

۱۶ - شخصی a ریال به ربح مرکب قرض و به اقساط سالانه b ریال پس از دو سال قرضش را مستهلك کرد؛ مطلوب است نرخ مرابحه.

۱۷ - شخصی ۲۰۰۰۰ ریال به ربح مرکب ۲۲ ساله از قرار ۵٪ قرض نمود؛ پس از پرداخت چهار قسط متساوی می‌خواهد قرضش را یکباره بپردازد؛ چقدر باید بدهد؟

۱۸ - شخصی a ریال به ربح مرکب از قرار ۵٪ قرض کرد؛ چه قسطی سالانه بپردازد تا پس از مدت ۵ سال قرضش  $\frac{a}{p}$  شود.

۱۹ - شخصی ۳۳۶۴۰ ریال به ربح مرکب قرض کرد و پس از چهار

سال با پرداخت دو قسط متساوی ۱۹۴۴۸ ریال در پایان هر دو سال قرضش را مستهلك می‌کند. مطلوب است نرخ معامله.

۲۰ - شخصی در ابتدای هر سال ۳۰۰۰ ریال از قرار نرخ ۳٪ به مرابحه مرکب می‌گذارد و یک سال بعد از پرداخت آخرین قسط هر سال مبلغ ۶۰۰ ریال از ذخیره‌اش برمی‌دارد تا پس از ۱۰ سال ذخیره‌اش تمام می‌شود. معین کنید چند قسط پرداخته است؟

۲۱ - شخصی ۷۵۰۰ ریال به ربح مرکب از قرار نرخ ۴٪/۵ قرض نموده و می‌خواهد در پایان هر دو سال به وسیله پرداخت اقساط متساوی ۷۵۰ ریالی آن را مستهلك کند. پس از چه مدت قرضش تمام می‌شود؟

۲۲ - اگر شخصی یک ریال از قرار نرخ ۳٪ به مرابحه مرکب بگذارد، پس از مدت ۵۰۰ سال چه مقدار عاید بازماندگانش خواهد شد؟

نرخ ۲۳٪ - شخصی از ابتدای ۱۶ سالگی معتاد به کشیدن سیگار شد. حساب کرد که هر روز بطور متوسط ۵/۵۰ ریال به مصرف این سم می‌رساند. معلوم کنید اگر مخارج سیگار سالانه را هر ساله از قرار نرخ ۴٪ به مرابحه مرکب می‌گذاشت در ۴۵ سالگی صاحب چه سرمایه‌ای می‌شد (سال را ۳۶۰ روز حساب کنید)؟

۲۴ - شخصی ۱۲۰۰۰۰۰ ریال از قرار نرخ ۴٪ به مرابحه مرکب می‌گذارد. دو سال بعد ۱۱۰۰۰۰۰ ریال از قرار نرخ مجهولی، ۵ ساله قرض می‌کند، پس از اختتام ۵ سال معلوم می‌شود که تمام قرضش با اصل و فرع طلبش مساوی شد. مطابقت است نرخ مبلغی که قرض کرده است؟

۲۵ - شخصی ۵۰۰۰۰۰۰ ریال سرمایه خود را بین سه اولادش که به سن ۵ سال، ۷ سال و ۱۰ سال بودند بدین قسم تقسیم کرد که اگر سهم هر یک را از قرار نرخ ۵٪ به مرابحه مرکب بگذارد، در موقع رسیدن به سن ۲۵ سالگی اصل و فرع طلبش مساوی باشد. سهم هر یک از اولادها را معین کنید.

۲۶ - شخصی برای تشکیل سرمایه تا مدت ۲۰ سال هر ساله مبلغ ده هزار ریال می‌پردازد. معین کنید پس از ۲۰ سال هر سال چه مبلغ دریافت دارد تا پس از انقضای ۴۰ سال ذخیره‌اش تمام شود. نرخ معامله ۴٪ است.

۲۷ - شخصی برای تشکیل سرمایه در ابتدای سال اول مبلغ a ریال و در ابتدای سال دوم مبلغ a. q ریال و در ابتدای سال سوم a. q<sup>۲</sup> ریال

شمار	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱۰۰	۰۰۰۰۰	۰۴۳	۰۸۷	۱۳۰	۱۷۳	۲۱۷	۲۶۰	۳۰۳	۳۴۶	۳۸۹
۱	۴۲۲	۴۷۵	۵۱۸	۵۶۱	۶۰۴	۶۴۷	۶۸۹	۷۳۲	۷۷۵	۸۱۷
۲	۸۶۰	۹۰۳	۹۴۵	۹۸۸	۱۰۳۰	۱۰۷۲	۱۱۱۵	۱۱۵۷	۱۱۹۹	۱۲۴۲
۳	۰۱۲۸۴	۳۲۶	۳۶۸	۴۱۰	۴۵۲	۴۹۴	۵۳۶	۵۷۸	۶۲۰	۶۶۲
۴	۷۰۳	۷۴۵	۷۸۷	۸۲۸	۸۷۰	۹۱۲	۹۵۳	۹۹۵	۱۰۳۶	۱۰۷۸
۵	۰۲۱۱۹	۱۶۰	۲۰۲	۲۴۳	۲۸۴	۳۲۵	۳۶۶	۴۰۷	۴۴۹	۴۹۰
۶	۵۳۱	۵۷۲	۶۱۲	۶۵۳	۶۹۲	۷۳۵	۷۷۶	۸۱۶	۸۵۷	۸۹۸
۷	۹۳۸	۹۷۹	۱۰۱۹	۱۰۶۰	۱۱۰۰	۱۱۴۱	۱۱۸۱	۱۲۲۲	۱۲۶۲	۱۳۰۳
۸	۰۳۳۴۲	۳۸۳	۴۲۳	۴۶۳	۵۰۳	۵۴۳	۵۸۳	۶۲۳	۶۶۳	۷۰۳
۹	۷۴۳	۷۸۲	۸۲۲	۸۶۲	۹۰۲	۹۴۱	۹۸۱	۱۰۲۱	۱۰۶۰	۱۱۰۰
۱۱۰	۰۴۱۳۹	۱۷۹	۲۱۸	۲۵۸	۲۹۷	۳۳۶	۳۷۶	۴۱۵	۴۵۴	۴۹۳
۱	۵۳۲	۵۷۱	۶۱۰	۶۵۰	۶۸۹	۷۲۷	۷۶۶	۸۰۵	۸۴۴	۸۸۳
۲	۹۲۲	۹۶۱	۹۹۹	۱۰۳۸	۱۰۷۷	۱۱۱۵	۱۱۵۴	۱۱۹۲	۱۲۳۱	۱۲۶۹
۳	۰۵۳۰۸	۳۴۶	۳۸۵	۴۲۳	۴۶۱	۵۰۰	۵۳۸	۵۷۶	۶۱۴	۶۵۲
۴	۶۹۰	۷۲۹	۷۶۷	۸۰۵	۸۴۳	۸۸۱	۹۱۸	۹۵۶	۹۹۴	۱۰۳۲
۵	۰۶۰۷۰	۱۰۸	۱۴۵	۱۸۳	۲۲۱	۲۵۸	۲۹۶	۳۳۳	۳۷۱	۴۰۸
۶	۴۴۶	۴۸۳	۵۲۱	۵۵۸	۵۹۵	۶۳۳	۶۷۰	۷۰۷	۷۴۴	۷۸۱
۷	۸۱۹	۸۵۶	۸۹۳	۹۳۰	۹۶۷	۱۰۰۳	۱۰۴۱	۱۰۷۸	۱۱۱۵	۱۱۵۱
۸	۰۷۱۸۸	۲۲۵	۲۶۲	۲۹۸	۳۳۵	۳۷۲	۴۰۸	۴۴۵	۴۸۲	۵۱۸
۹	۵۵۵	۵۹۱	۶۲۸	۶۶۴	۷۰۰	۷۳۷	۷۷۳	۸۰۹	۸۴۶	۸۸۲
۱۲۰	۹۱۸	۹۵۴	۹۹۰	۱۰۲۷	۱۰۶۳	۱۰۹۹	۱۱۳۵	۱۱۷۱	۱۲۰۷	۱۲۴۳
۱	۰۸۲۷۹	۳۱۴	۳۵۰	۳۸۶	۴۲۲	۴۵۸	۴۹۳	۵۲۹	۵۶۵	۶۰۰
۲	۶۳۶	۶۷۲	۷۰۷	۷۴۳	۷۷۸	۸۱۴	۸۴۹	۸۸۴	۹۲۰	۹۵۵
۳	۹۹۱	۱۰۲۶	۱۰۶۱	۱۰۹۶	۱۱۳۲	۱۱۶۷	۱۲۰۲	۱۲۳۷	۱۲۷۲	۱۳۰۷
۴	۰۹۳۴۲	۳۷۷	۴۱۲	۴۴۷	۴۸۲	۵۱۷	۵۵۲	۵۸۷	۶۲۱	۶۵۶
۵	۶۹۱	۷۲۶	۷۶۰	۷۹۵	۸۳۰	۸۶۴	۸۹۹	۹۳۴	۹۶۸	۱۰۰۳
۶	۱۰۰۳۷	۱۰۷۲	۱۰۹۶	۱۱۴۰	۱۱۷۵	۱۲۰۹	۱۲۴۳	۱۲۷۸	۱۳۱۲	۱۳۴۶
۷	۳۸۰	۴۱۵	۴۴۹	۴۸۳	۵۱۷	۵۵۱	۵۸۵	۶۱۹	۶۵۳	۶۸۷
۸	۷۲۱	۷۵۵	۷۸۹	۸۲۳	۸۵۷	۸۹۰	۹۲۴	۹۵۸	۹۹۲	۱۰۲۵
۹	۱۱۰۵۹	۱۱۴۳	۱۱۸۰	۱۲۱۶	۱۲۵۳	۱۲۸۹	۱۳۲۶	۱۳۶۲	۱۳۹۸	۱۴۳۴
$S = \bar{P}, 68557 T. 58$ $1000 = 16' 40''$ $1100 = 18' 20''$ $1200 = 20' 0''$										

و به همین طریق تا مدت  $n$  سال می پردازد . مطلوب است اصل و فرع سرمایه حاصل در صورتی که نرخ مرابحه صدی  $q$  باشد .

$$n=10, q=2, a=1000$$

۲۸ - جمعیت کشوری ۲۰ میلیون نفر است . اگر هر سال ۲ درصد به جمعیت اضافه شود پس از ۴۰ سال جمعیت کشور چقدر می شود ؟

۲۹ - جمعیت کشوری ۲۰ میلیون نفر است . هر سال ۱۷ درصد متولد می شوند و ۱۴ درصد می میرند . پس از چند سال جمعیت کشور دو برابر می شود ؟

۳۰ - شخصی اول هر سال ۳۰۰۰ ریال به حساب پس انداز فرزند خود می گذارد . معین کنید پس از ده سال بانک چه مبلغ به او می پردازد . ( صندوق پس انداز ملی تا ۲۰۰۰۰ ریال از قرار ۴٪ و از ۲۰۰۰۱ ریال تا ۵۰۰۰۰ ریال را ۲٪ نسبت به مازاد و از ۵۰۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰۰ ریال را ۱٪ نسبت به مازاد سود می دهد ) .

### خلاصه مطالب مهم

۱ - اگر در مرابحه ، سود را در آخر هر سال یا در آخر هر زمان ثابت به سرمایه بیفزایند و مجموع اصل و فرع را سرمایه برای سال بعد قرار دهند ، می گویند که سرمایه مذکور به ربح مرکب گذاشته شده است .

۲ - اگر  $a$  ریال از قرار  $i\%$  به مرابحه مرکب گذاشته شود اصل و فرع آن پس از مدت  $n$  سال طبق دستور زیر بدست می آید :

$$A = a(1+r)^n \quad r = \frac{i}{100}$$

۳ - اگر کسی هر سال (یا هر زمان ثابت) یک بار تادیت معینی مبالغی به ربح مرکب بپردازد ، این عمل را اگر برای تشکیل سرمایه باشد قسط - السنین به منظور تشکیل سرمایه و اگر برای استهلاك دین باشد . قسط السنین به منظور استهلاك دین می نامند .

۴ - قسطها اگر برای تشکیل سرمایه باشد در ابتدای هر سال و اگر برای استهلاك دین باشد در آخر هر سال پرداخت می شود .